Problemas de cálculo diferencial e integral

José Ventura Becerril Espinosa
Jaime Grabinsky Steider
Judith Omaña Pulido
Cutberto Salvador Romero Meléndez

Coordinación: Marina Salazar Antúnez

Básicas

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Problemas de cálculo diferencial e integral

José Ventura Becerril Espinosa
Jaime Grabinsky Steider
Judith Omaña Pulido
Cutberto Salvador Romero Meléndez

Coordinación: Marina Salazar Antúnez

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas

ISBN: 970-654-501-8

Coordinación: Marina Salazar Antúnez

Corrección:
Marisela Juárez Capistrán
Ilustración de portada:
Consuelo Quiroz Reyes
Diseño de Portada:
Modesto Serrano Ramírez

Sección de producción
y distribución editoriales
Tel. 5318-9222 / 9223
Fax 5318-9222

Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco
Av. San Pablo 180
Col. Reynosa Tamaulipas
Delegación Azcapotzalco
C.P. 02200
México, D.F.

Problemas de cálculo diferencial e integral
1a. edición, 1994
2a. edición, 1999
7a. reimpresión, 2006
Impreso en México

CONTENIDO

PRESENTACIÓN

Mayo de 1993

La tarea de enseñar matemáticas a futuros ingenieros no es fácil. Las preguntas: *¿Qué "tanta" matemática "debe" enseñarse? ¿Cómo enseñar matemáticas a un estudiante de Ingeniería, a fin de motivarlo en el aprendizaje? ¿Por qué es desagradable la matemática para un futuro ingeniero? ¿Qué utilidad tendrá para nuestros estudiantes en su desarrollo profesional lo que les estamos enseñando?*, no han sido respondidas satisfactoriamente por los profesores de matemáticas. El material aquí presentado, así como el nuevo programa de Cálculo, son un intento preliminar de dar respuesta a estas preguntas.

El presente trabajo es una recopilación de problemas de Cálculo Diferencial e Integral, los cuales han sido utilizados por sus autores en los cursos de Cálculo I y Cálculo II, que han impartido utilizando los *Nuevos Programas de Cálculo* durante la etapa previa a su implementación definitiva. Estos nuevos programas están siendo implementados por la coordinación de Cálculo durante el actual trimestre 93-P, en forma departamental. En vista de ello, se hace necesario contar con materiales de apoyo tanto para los alumnos, como para los maestros, a fin de que se pueda captar el nuevo enfoque que se ha propuesto en esos programas.

Este material de apoyo se presenta dividido en tres partes. En la primera parte aparecen los problemas que se sugieren para Cálculo I presentados por los profesores Cutberto Romero y José V. Becerril; en la segunda parte aparecen los problemas para Cálculo II sugeridos por la profesora Judith Omaña y el profesor Cutberto Romero. Al final de cada una de estas partes se anexan las evaluaciones realizadas durante el periodo arriba mencionado, aplicadas por dichos profesores. Por último, se da una miscelánea de problemas de aplicación que presenta el profesor Jaime Grabinsky.

Profa. Marina Salazar Antúnez,
Coordinadora de Cálculo Diferencial e Integral I y II.

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

LOS NÚMEROS REALES

1. Demostrar que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ son números irracionales.
2. Dar un número irracional que pertenezca al intervalo (1.721, 1.722).
3. Dar un número irracional x que satisfaga: $-\frac{1}{3} < x < -\frac{1}{4}$.
4. Sabiendo que $10^{-5} < x \leq 2 \cdot 10^{-5}$ y que $9999 \leq y < 10000$, acotar, es decir, dar un intervalo en donde se encuentre, $-\frac{y}{x}$.
5. Escribir $(-1, 10]$ como la unión de dos intervalos, uno abierto y otro cerrado.
6. Expresar $(-1, 10]$ como una intersección de dos intervalos de longitud finita.
7. Expresar $(-1, 10]$ como una intersección de dos intervalos de longitud infinita.
8. Probar que si $-2 \leq x < 2$, entonces $-5 \leq 3x + 1 < 7$.
9. Probar que $x \in [2, 5] \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2x+1} \in [\frac{1}{11}, \frac{1}{5}]$.
10. Para cada uno de los problemas siguientes determinar el conjunto de números reales que satisfacen la condición dada:
    - $2x - 3 \geq 5x - 2$
    - $x - 7 \leq 2(x - 3) + 4 - x$
    - $\frac{3x}{4} - 8 > \frac{7x}{3} - 27$
    - $3x^2 - 7x < 0$
    - $(x + 3)^2 - 4(x + 3) \geq 0$
    - $(x - 7)^2 \geq 25$
    - $\frac{x-1}{x+1} \geq \frac{2x+3}{x+1}$
    - $(2x + 3)^2 \leq 64$
    - $25x^2 \leq -30x - 18$
    - $4 < x^2 < 9$

- $3x^2 + 7x - 9 < 0$
- $x(x+3)(x-1) \leq 0$
- $2x - 1 > \frac{1}{2x+1}$
- $\frac{1}{x-1} \geq 2$

11. Expresar, con la ayuda de intervalos, los números reales que satisfagan la condición dada:

    - $-2.1 < x \leq 4.31$
    - $3.41 < -x \leq 3.42$
    - $-2.1 < x - 2 \leq -1.9$
    - $|-5x + 8| < 0.4$
    - $4.29 < 3 - x \leq 4.31$
    - $2 < \frac{1}{x-1} \leq 5$
    - $|2x - 1| \leq 0.02$
    - $|x - 8| \geq 0.2$

12. En cada una de las afirmaciones siguientes indique cual de las proposiciones son verdaderas:

    - Para cualquier número real

    $$x \leq x^3, \quad x \leq 2x, \quad |x| \leq x^2, \quad x \leq |x|,$$

    $$1 + |x| \leq (1 + |x|)^2$$

    - Para a cualquier número real x, tal que $0 < x < 1$, se tiene

    $$x^3 \leq x^2, \quad x \leq \sqrt{x}, \quad x < \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

    - Si $x^2 < 9$, entonces

    $$x < 3 \quad \text{ó} \quad x < -3, \quad x < 3 \quad \text{y} \quad x < -3, \quad |x| \leq 3, \quad x < 3$$

- Sea n un número entero. La condición $|n| < 4$ significa:

$$n < 4, \quad n < 4 \quad \text{ó} \quad n < -4, \quad -4 < n < 4, \quad 0 \leq n < 4,$$

$$n \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

13. Determinar todos los números reales x tales que

$$|x - 0.5| < 1 \quad \text{y} \quad |2 - x| < 0.75$$

14. Se lanza un objeto hacia arriba en línea recta, cou una velocidad de 160 pies/seg. Su distancia d, en pies, sobre la Tierra, después de t segundos (eliminando la resistencia del aire) está dada por $d = 160t - 16t^2$. Encontrar el tiempo t para el cual su distancia d sea superior a los 256 pies.

15. Determinar el conjunto solución para cada una de las siguientes desigualdades:

    - $|x - 1| < 0.1$
    - $|2x + 3| \leq \frac{1}{2}$
    - $|\frac{-5}{x} + 8| < 0.4$
    - $|\frac{2}{x} - 2| \geq 0.4$
    - $\frac{|4x-2|}{x} \leq 3$
    - $\frac{1}{|2x-1} < 2 - x$
    - $|\frac{2x-1}{x-3}| > 2$
    - $|\frac{2x-1}{x-3}| < 2$
    - $2x + 5 \leq \frac{3}{x+1}$
    - $4x^2 + 2x < 9 - 7x \leq 11 - 7x$
    - $x^3 < x$
    - $3(x^2 + 1)(x - 2) > 0$
    - $|3x - 2| - |x + 1| < 5$
    - $|x + 3| \leq |5x - 1|$
    - $\frac{x^2-x+1}{2-x} \geq 1$

FUNCIONES

1. Considérese una gráfica de la temperatura en grados Centígrados, C, en función de la temperatura en grados Fahrenheit, F, y supóngase que esta gráfica es una línea recta. Se conoce que $100°C$ y $212°F$ corresponden a la temperatura a la cual hace ebullición el agua. Similarmente, $0°C$ y $32°F$ corresponden al punto de congelación del agua.

   a) ¿A qué temperatura en grados Fahrenheit corresponde $20°C$?

   b) ¿A qué temperatura en grados Centígrados corresponde $100°F$?

   c) ¿Qué temperatura tiene el mismo valor en grados Fahrenheit y en Centígrados?

2. Cuando una taza de café caliente se coloca sobre la mesa, su temperatura decrece. La razón, R, a la cual su temperatura cambia está regida por la Ley de Enfriamiento de Newton, la cual dice que la razón es proporcional a la diferencia entre las temperaturas del café y del aire circundante. Pensemos en la razón R como una cantidad negativa ya que la temperatura del café está descendiendo. Si la temperatura del café es $H°C$, y la temperatura del cuarto es de $20°C$,

   a) Escribir una fórmula para R en función de H.

   b) Trazar la gráfica de esa función.

3. Para pequeños cambios de temperatura, la fórmula para la expansión de una varilla metálica sujeta a un cambio de temperatura es:

$$l - l_0 = al_0(t - t_0),$$

   en donde l es la longitud del objeto a la temperatura t, l_0 es la longitud inicial a la temperatura l_0, y a es una constante que depende del tipo de metal.

   a) Expresar l como una función lineal de t. Encontrar la pendiente y la intersección con el eje Y.

   b) Supóngase que se tuvo una varilla con longitud inicial de 100 cm a $60°F$ fabricada con un metal para el cual a es igual a 10^{-5}. ¿Qué longitud tendrá a los $150°F$?

c) ¿Qué significado tiene el signo de la pendiente de la gráfica en relación con la expansión de un metal sometido a un cambio de temperatura?

4. Un aeroplano utiliza una cantidad fija de combustible para despegar, una cantidad fija (diferente) para aterrizar, y una cantidad fija (diferente) por milla cuando está en el aire. ¿Cómo depende la cantidad total de combustible requerido, de la longitud del viaje? Escribir una fórmula para la función involucrada. Explicar el significado de las constantes que aparecen en la fórmula.

5. Sean $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = \sqrt{x}$, $f_4(x) = \frac{1}{x}$, $f_5(x) = \frac{1}{x^2}$, $f_6(x) = [x]$. Obtener $f_i(2x), 2f_i(x), f_i(-x), -f_i(x), f_i(x+1), f_i(x)+1$, $f_i(x-1), f_i(x)-1$ y $1-2f_i(3x-6)$, para $i \in \{1,2,3,...,6\}$. Grafíquelas.

6. Graficar las funciones siguientes:

   a) $f_1(x) = -x^2 + 3$, si $x \in (-5, \infty)$
   b) $f_2(x) = 2x^2 + x - 1$
   c) $f_3(x) = 5\sqrt{2x}$ ¿$-4 \in R_{f_3}$? ¿$-\frac{1}{2} \in D_{f_3}$?
   d) $f_4(x) = 2 - \sqrt{4x-2}$ ¿$0 \in D_{f_4}$? ¿$1 \in R_{f_4}$?
   e) $f_5(z) = |z - \frac{1}{2}|$ ¿$-2 \in R_{f_5}$? ¿$2 \in D_{f_5}$?
   f) $f_6(t) = |-t+3|$
   g) $f_7(x) = 1 + 2|3x+6|$
   h) $f_8(x) = [x+1]$
   i) $f_9(w) = [2w]$
   j) $f_{10}(z) = -1 + 3[-z+2]$

7. Obtener el dominio de las funciones siguientes:

   a) $f_1(x) = \frac{4x}{\sqrt{2x-1}}$
   b) $x \overset{f_2}{\mapsto} \frac{x-1}{x^2-5x+6}$
   c) $h(z) = \sqrt{z-(z-1)^2}$

d) $w \overset{g}{\mapsto} \frac{w}{(w-1)(w-2)(w-3)}$

e) $f_3(t) = \frac{2t}{t^2-4t+4}$

8. Para cada una de las funciones siguientes determinar el dominio y calcular la imagen de cada uno de los valores de la variable independiente dados:

   a) $f(x) = \sqrt{(x+1)^2+3}; x_0 = -1, x_0 = 0, x_0 = 3, x_0 = 1-h$

   b) $g(x) = \frac{1+2x}{2-x}; x_0 = 6, x_0 = \frac{-3}{4}, x_0 = 2-h, x_0 = \frac{1+h}{1-h}$

   c) $f(x) = \frac{4-x^2}{3+2x^2}; x_0 = 0, x_0 = 2, x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

9. Para cada una de las funciones siguientes obtener su dominio, rango, raíces, paridad, intervalos de monotonía y realizar un esbozo gráfico:

   a) $f_1(x) = -x+1$

   b) $f_2(x) = 6x-2$

   c) $f_3(z) = (z-3)^2+2$

   d) $g_1(w) = (w-2)^2$

   e) $g_2(x) = |x-3|+2$

   f) $g_3(z) = 3|z-2|-1$

   g) $h_1(x) = \sqrt{2x-1}+\frac{1}{2}$

   h) $h_2(t) = [t]$

   i) $h_3(x) = \begin{cases} |2x| & x \leq 0 \\ x^2+1 & 0 < x \leq 2 \\ -1 & x > 2 \end{cases}$

   j) $h_4(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & x \geq 0 \\ |x-8| & x < 0 \end{cases}$

   k) $h_5(x) = \begin{cases} 3|x-2| & x < 3 \\ \frac{1}{x-5} & x \geq 3 \end{cases}$

   l) $r(x) = \frac{1}{x+2} - 1$

   m) $s(t) = \frac{1}{(x-2)^2}$

10. Trazar la gráfica de una función f definida para $x \geq 0$, con todas las siguientes propiedades:

- $f(0) = 2$
- $f(x)$ es creciente para $x \in [0, 1)$
- $f(x)$ es decreciente para $1 < x \leq 3$
- $f(x)$ es creciente para $x > 3$ (Existen muchas respuestas)

11. Trace la gráfica de una función tal, que para cualquier número en el intervalo $[-2, 0]$ sea igual al doble de ese número; para cada número en $(0, 1]$ sea igual a la tercera parte de ese número; para cada número en $(1, \frac{5}{2})$ sea igual al recíproco de ese número; para cada número en $(6, 10)$, sea igual al negativo de ese número, y para cada número en $(10, \infty)$ sea igual a 23. Determine el dominio y el rango.

12. Resuelva las desigualdades siguientes e interprete geométricamente el resultado, considerando cada miembro de la desigualdad como una función:

    a) $\frac{1}{x} > -1$
    b) $x^2 \leq 4$
    c) $\frac{1}{x^2} \leq 9$
    d) $-x + 2 < 3x + 6$
    e) $x^2 + 1 \geq -x^2 + 3$

13. Sean $f(x) = 3x^2 - 2$, $g(y) = y + 1$

    Determinar $(f+g)(-1), (f \cdot g)(0), (f \circ g)(-1), (g \circ f)(0), (f+g)(y), (f \cdot g)(z)$,
    $(f \circ g)(y), (g \circ f)(x)$, y los dominios de las funciones anteriores.

14. Expresar cada una de las funciones siguientes como una composición de funciones:

    a) $h(t) = (1 + t^3)^{27}$
    b) $f(z) = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$

c) $g(x) = 5 + (x - \sqrt{2+x})^{\frac{3}{2}}$

15. Sean $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$, $g(t) = \sqrt{t^3 + 1}$. Obtener el dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$. Obtener una expresión para ambas composiciones.

16. Sean $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1}{x}$. Obtener el dominio de $f \circ g$ y de $g \circ f$. Obtener una expresión para ambas composiciones.

17. Obtener $f \circ g$, $g \circ f$ y $f + g$ para las funciones: $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \leq 0 \\ x - 8 & 0 < x < 2 \\ 5 & x \geq 2 \end{cases}$

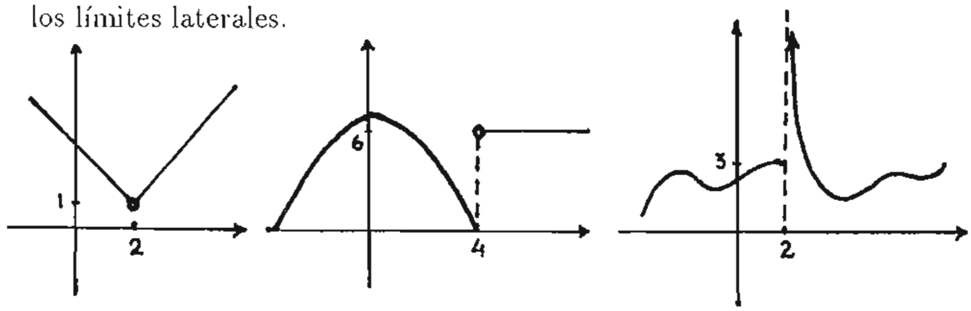
$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & x \leq 0 \\ -1 & 0 < x < 2 \\ \frac{1}{x} & x \geq 2 \end{cases}$$

18. Obtener $f \circ g$, $g \circ f$ y $f + g$ para las funciones: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x & 0 < x < 4 \\ 1 - x & x \geq 4 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} x + 3 & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & x \geq 0 \end{cases}$$

LÍMITES

1. Para cada una de las gráficas siguientes determinar si existe el límite en el punto indicado y dar su valor. En caso de que no exista, obtener los límites laterales.



2. Si
$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{si} \quad x \neq 2 \\ 1, & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$
obtener $\lim_{x \to 2} f(x)$

3. El número $N(p)$ de calculadoras que puede vender una compañía manufacturera a un precio de p pesos por unidad, está dado por $N(p) = 500/p^2$. Encontrar $\lim_{p \to 0} N(p)$ e interpretar el resultado.

4. Un equipo médico de investigación estableció que la masa $M(t)$ de un tumor, como función del tiempo t al cual el paciente es expuesto a radiación durante el tratamiento, está dado por
$$M(t) = \frac{t^2 - 5t + 6}{t - 3},$$
en donde $M(t)$ está en miligramos y t en segundos. Debido al mal funcionamiento de los aparatos utilizados es imposible exponer al paciente exactamente por 3 segundos de terapia de radiación. ¿Qué valor debe asignarse a $M(3)$, a fin de que $M(t)$ sea una función continua?.

5. Dibuja la gráfica de una función continua en $R - \{-2, -1, 2\}$, que satisfaga lo siguiente:
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{xto-1} f(x) = -\infty$$

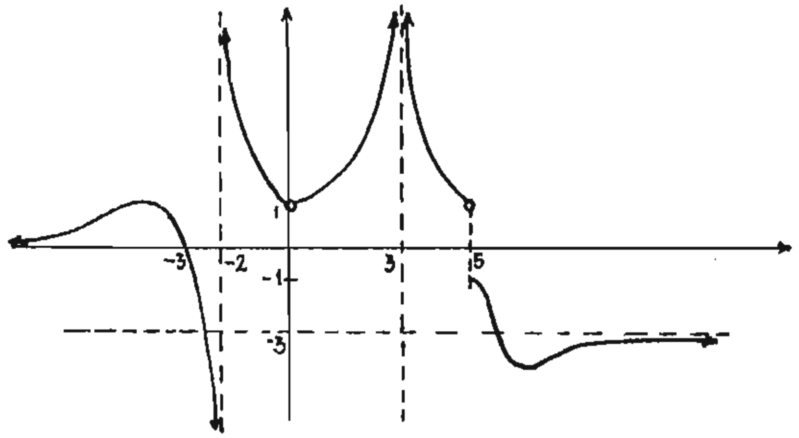
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4^- \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 3^+$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = 0$$

$$f(3) = 0 \quad \text{y} \quad f(0) = 0$$

6. Dada la siguiente gráfica de $f(x)$, obtener: dominio, raíces, discontinuidades y su clasificación, asíntotas

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to0} f(x), \lim_{x\to3} f(x), \lim_{x\to-2} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to5} f(x)$$



7. Dibuje la gráfica de una función continua que tenga tres raíces en el intervalo (-2,1].

8. Dar una raíz aproximada para la función

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1,$$

cuya exactitud sea de 0.1 (un décimo).

9. Realice un esbozo gráfico de

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

LA DERIVADA

1. Una pelota es arrojada desde un puente. La altura h a la que se encuentra la pelota encima del piso t segundos después de que es arrojada, está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 50t + 36$$

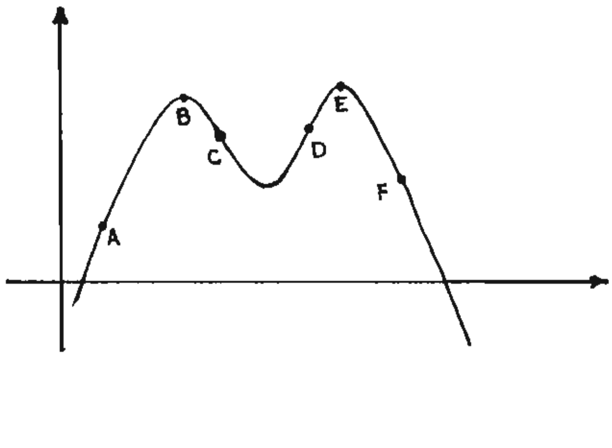
   - ¿Cuál es la altura del puente?
   - ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota para el primer segundo?
   - Grafica la función h y determina la altura máxima que la pelota alcanzará. ¿Cuál deberá ser la velocidad de la pelota cuando está en el punto en donde alcanza su altura máxima?
   - Utiliza la gráfica para decidir en qué tiempo t, la pelota alcanza su altura máxima.
   - Obtener la velocidad instantánea de la pelota en $t = 1$ segundos.

2. Un automóvil es conducido a una velocidad constante. Bosquejar una gráfica de la distancia que el carro ha viajado, como función del tiempo.

3. Considera ahora un automóvil que viaja con velocidad creciente. Obtén lo que se pide en el problema 2.

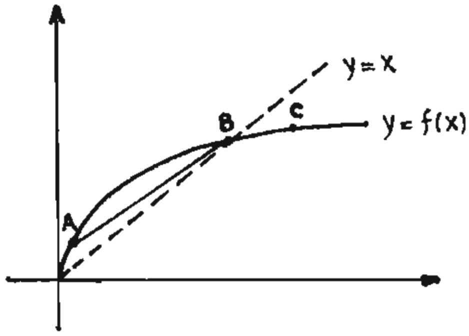
4. Ahora el auto empieza con una alta velocidad y su velocidad entonces decrece lentamente. Realiza el bosquejo que se pide en el problema 2.

5. Para la función mostrada en la figura,



- ¿En qué puntos la pendiente de la curva es negativa?
- ¿En qué puntos es positiva? ¿y cero?
- ¿Qué punto tiene la pendiente más positiva?
- ¿Y cuál la tiene más negativa?

6. Para la gráfica mostrada en la figura, ordenar los siguientes números en forma ascendente:
   - la pendiente de la curva en A
   - la pendiente de la curva en B
   - la pendiente de la curva en C
   - la pendiente de la línea AB
   - el número 0
   - el número 1



7. Si $f(x) = x^2 + 4x$, obtener $f'(3)$ utilizando la definición de derivada.

8. Si $f(x) = x^3$, obtener $f'(-2)$ y $f'(2)$ empleando la fórmula para la derivada de x^n. ¿Qué relación observas entre $f'(-2)$ y $f'(2)$? Explicar geométricamente porqué esto debe ocurrir.

9. Sean $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = kx^2$, en donde k es una constante.
   - Encuentra la pendiente de la línea tangente a la gráfica de g en el punto (4,2). (No necesitas utilizar la definición de derivada)
   - Encuentra la ecuación de esa línea tangente.
   - Si la gráfica de f contiene el punto (4,2), encontrar k.
   - ¿ En dónde la gráfica de f intersecta a la línea tangente encontrada antes?

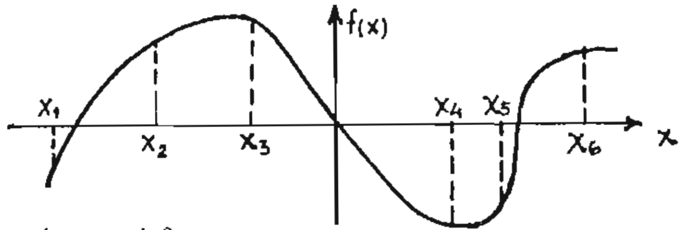
10. ¿Si $g(x)$ es una función impar y $g'(4) = 5$, a qué debe ser igual $g'(-4)$?

11. Bosquejar las gráficas de las funciones

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = f(x) + 3$$

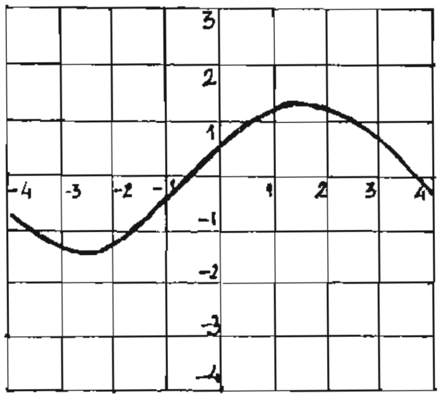
en el mismo conjunto de ejes. ¿Qué puedes decir acerca de las pendientes de las líneas tangentes a las dos gráficas en el punto $x = 0$?, ¿en $x = 2$? y ¿en $x = x_0$? Puede pensarse que sumando un valor constante C, a cualquier función, no cambia el valor de las pendientes de su gráfica?

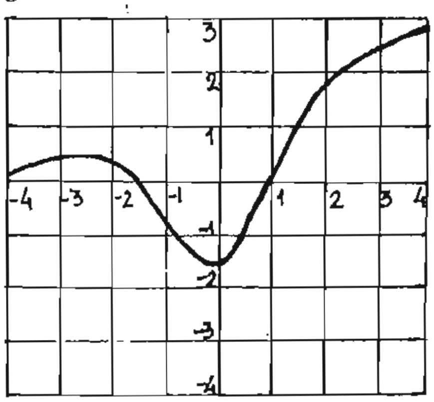
12. En la gráfica de f, ¿en cuál de los valores de x_i señalados

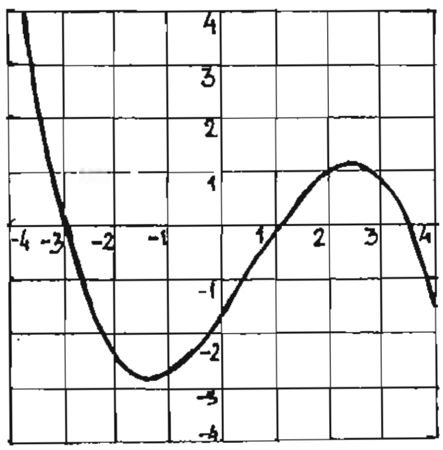


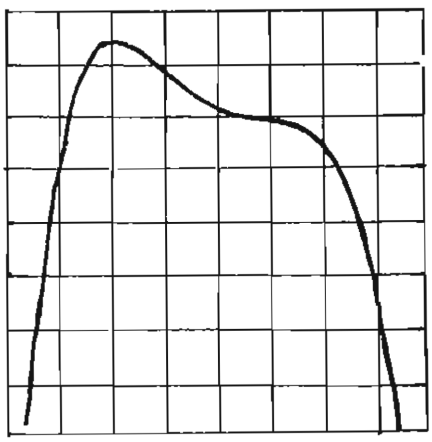
- es $f(x)$ más grande?
- es $f(x)$ más chica?
- es $f'(x)$ más grande?
- es $f'(x)$ más chica?

13. Para las gráficas del 1 al 4, bosquejar la gráfica de la función derivada:

1.


2.


3.


4.


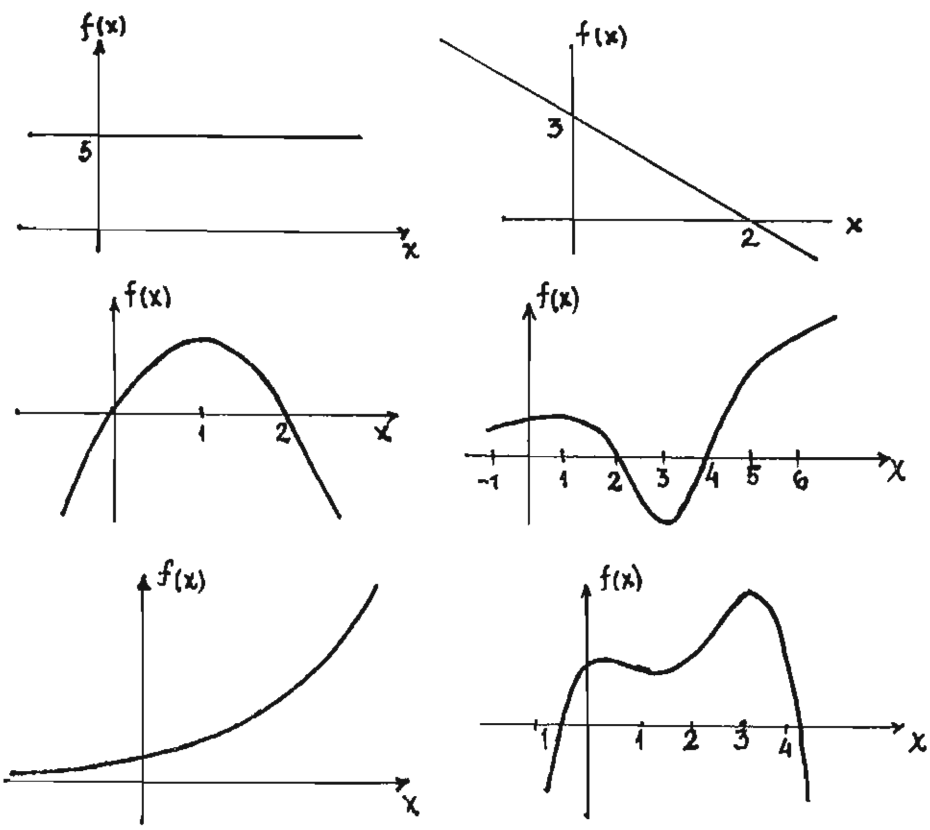
14. Para las funciones siguientes bosquejar la gráfica de $f(x)$ y utilizar esta gráfica para bosquejar la gráfica de $f'(x)$,

- $f(x) = x(x-1)$
- $f(x) = 5x$

15. Haga un bosquejo gráfico de las siguientes curvas:

- Una curva "suave" cuya pendiente es a la vez positiva en todos lados y decreciente gradualmente.
- Una curva "suave" cuya pendiente sea a la vez positiva en todos lados y creciente gradualmente.
- Una curva "suave" cuya pendiente sea a la vez negativa en todos lados y decreciente gradualmente.
- Una curva "suave" cuya pendiente sea a la vez negativa en todos lados y creciente gradualmente.

16. Bosquejar la gráfica de $y = f'(x)$ para cada una de las funciones cuya gráfica se da a continuación:



17. Para dar a un paciente un antibiótico lentamente, la droga es inyectada en el músculo. (Por ejemplo, para enfermedades venéreas la penicilina es suministrada de esta forma) La cantidad de droga en el flujo sanguíneo empieza en cero, aumenta a un máximo y luego decae a cero de nuevo.

    - Bosqueja una posible gráfica de la cantidad de la droga en el flujo sanguíneo como una función del tiempo.
    - Describe cómo la razón a la cual la droga está entrando o dejando (saliendo) a la sangre cambia en el tiempo.

DERIVACIÓN

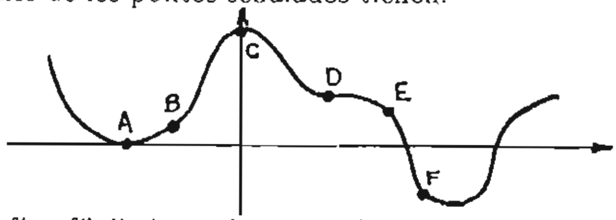
1. Haga el bosquejo gráfico de las siguientes curvas:

   - Una curva cuyas primera y segunda derivadas sean positivas en dondequiera.
   - Una curva cuya segunda derivada sea negativa en todos lados, pero cuya primera derivada sea positiva en todos lados.
   - Una curva cuya segunda derivada sea positiva en dondequiera, pero cuya primera derivada sea negativa en todos lados.
   - Una curva cuyas primera y segunda derivada sean negativas en dondequiera.

2. Bosquejar la gráfica de una función cuya pendiente sea a la vez positiva y creciente primero, y que a partir de cierto punto sea decreciente,

   - bosquejar la gráfica de la primera derivada de la curva anterior,
   - bosquejar la gráfica de la segunda derivada dela curva anterior.

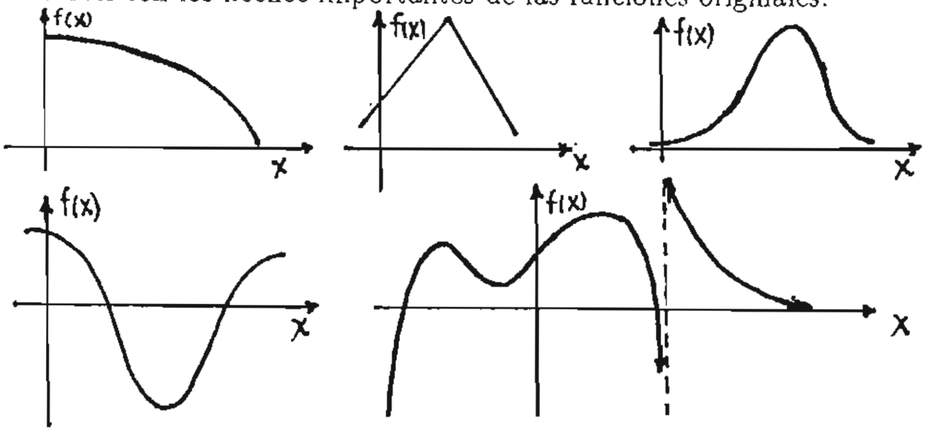
3. ¿Cuáles de los puntos señalados tienen:



   - f' y f'' distintas de cero y del mismo signo?
   - al menos dos de f, f', f'' son iguales a cero?

4. ¿Es la función siguiente diferenciable en $x = 0$? $f(x) = (x + |x|)^2 + 1$

5. Bosquejar las gráficas de las derivadas de las funciones, cuyas gráficas aparecen a continuación. Asegúrate de que tus bosquejos sean consistentes con los hechos importantes de las funciones originales.



6. Considera la función dada por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{cuando} \quad x \geq 1 \\ 3x-1, & \text{cuando} \quad x > 1 \end{cases}$$

dibuja la gráfica de f. ¿Es f continua? ¿Es f diferenciable en $x = 1$? Justifica tu respuesta.

7. Sean $f(x) = -3x + 2$ y $g(x) = 2x + 1$

   - Si $K(x) = f(x)+g(x)$, encontrar una fórmula para $K(x)$ y verificar la regla de la suma para la derivación, comparando $K'(x)$ con $f'(x) + g'(x)$.
   - Si $J(x) = f(x) - g(x)$, determinar una fórmula para $J(x)$ y comparar $J'(x)$ con $f'(x) - g'(x)$.

8. Sea $r(t) = 2t - 4$. Si $s(t) = 3r(t)$, verificar que $s'(t) = 3[r'(t)]$.

9. Si $f(x) = 5x - 3$ y $g(x) = -2x + 1$, encontrar la derivada de $f(g(x))$. Basándote en tu respuesta anterior, hacer una conjetura acerca de la derivada de la composición de dos funciones lineales.

10. Si $r(x) = f(x) + 2g(x) + 3$, $\quad f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = r(x)$, expresar

    - $r'(x)$ en términos de $f(x)$ y $g(x)$
    - $f'(x)$ en términos de $f(x)$ y $r(x)$

11. Encontrar la derivada de las funciones siguientes:

    - $y = x^{12}$
    - $y = x^{-12}$
    - $y = x^{4/3}$
    - $f(x) = \frac{1}{x^4}$
    - $f(x) = \sqrt[4]{x}$
    - $f(x) = x^e$
    - $y = 4x^{3/2} - 5x^{1/2}$
    - $y = 6x^3 + 4x^2 - 2x$

- $y = 3t^2 + \frac{12}{\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}$
- $y = \frac{x^2+1}{x}$
- $y = \frac{\theta-1}{\sqrt{\theta}}$
- $w = (t^3 + 5t^2 + t)(t^2 - 7t + 2)$
- $f(x) = \frac{1+x}{2+3x+4x^2}$
- $f(x) = \frac{3x^2}{5x^2+7x}$
- $f(x) = (x^5 + 1)^{12}(x^2 + 3)^6$

12. Si $f(t) = 2t^3 - 4t^2 + 3t - 1$, encontrar $\frac{df(t)}{dt}$ y $\frac{d^2f(t)}{dt^2}$

13. Si $f(x) = x^7 + 5x^5 - 4x^3 + 6x - 7$, encuentra la séptima y la octava derivada de f.

14. La gráfica de la ecuación $y = x^3 - 9x^2 - 16x + 1$ tiene una pendiente igual a 5 en dos puntos exactamente. Encontrar las coordenadas de esos puntos.

15. Si $f(x) = 13 - 8x + \sqrt{2}x^2$ y $f'(r) = 4$, encontrar r.

16. ¿Para qué puntos en el dominio de la función $f(x) = x^4 - 4x^3$ es la función decreciente y cóncava hacia arriba a la vez?

17. Si $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 23x + 7$, encontrar los intervalos en los cuales $f'(x) \geq 1$.

18. Encuentra $f'(x)$ para las siguientes funciones, utilizando la regla del producto para derivadas y sin realizar la multiplicación:

$$f(x) = (x-1)(x-2), \quad f(x) = (x-1)(x-2)(x-3),$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

19. Encuentra la derivada de

- $f(x) = (x+1)^{99}$
- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
- $w = (\sqrt{t}+1)^{100}$

- $k(x) = \frac{s}{(x^2+1)^2}$
- $h(x) = \frac{3\sqrt{3}+x^2}{2+4\sqrt{4}}$
- $h(t) = (12t^3 - 4t)(\sqrt[3]{t^2} + 5t)$
- $f(s) = \frac{4}{\sqrt[3]{s^2}} - 3s^5 + 2s$
- $w = (t^2 + 3t)(1 - 2t)^9$

20. Dados: F(2)=1, F(4)=3, F'(2)=5, F'(4)=7, G(4)=2, G(3)=4, G'(4)=6 y G'(3)=8, obtener:

    - H(4), si H(x)=F(G(x))
    - H'(4), si H(x)=F(G(x))
    - H(4), si H(x)=G(F(x))
    - H'(4), si H(x)=G(F(x))
    - H'(4), si H(x)=F(x)/G(x)

GRÁFICAS

1. ¿Bajo qué condiciones para a, b, y c la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

es creciente en todos lados?.

2. Encontrar analíticamente los intervalos en los cuales la función

$$f(x) = \frac{x+50}{x^2+525}$$

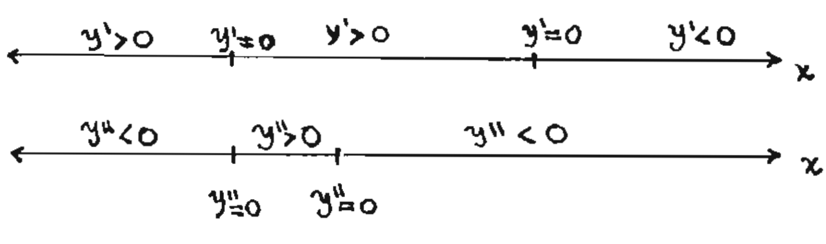
es creciente o decreciente.

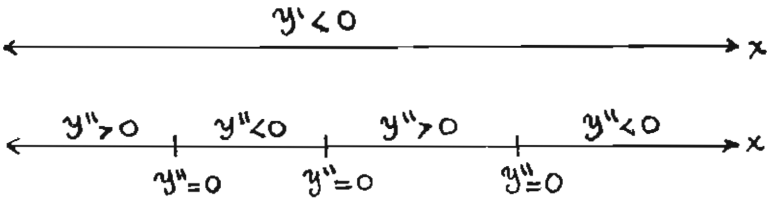
3. Bosquejar la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$.

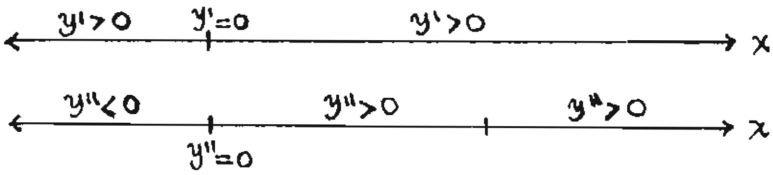
4. Supóngase que una función f tiene exactamente un punto crítico en $x = 3$. En los puntos siguientes se dan condiciones adicionales. En cada caso decidir cuándo $x = 3$ es un máximo local, un mínimo local, o ninguno de los dos. Explicar el razonamiento seguido. Bosquejar posibles gráficas para los cuatro casos:

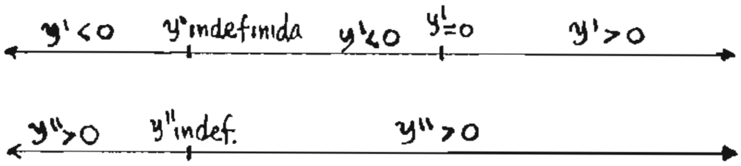
   - $f'(1) = 3$ y $f'(5) = -1$
   - $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   - $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(4) = 4$, $f(5) = 5$
   - $f'(2) = -1$, $f(3) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

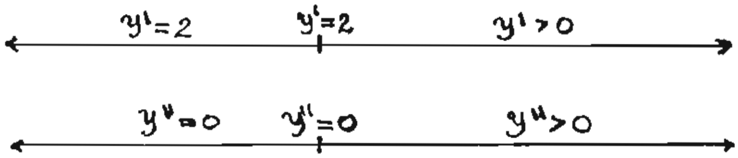
   Para los seis problemas siguientes bosquejar una posible gráfica de $y = f(x)$, utilizando la información dada acerca de la derivada de $y = f(x)$. Suponer que la función está definida y es continua para todo $x \in R$.

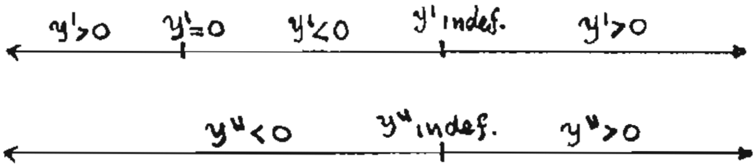
5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

11. Considera la función $p(x) = x^3 - ax$, en donde a es constante

- Si $a < 0$, muestra que $p(x)$ es siempre creciente
- Si $a > 0$, muestra que $p(x)$ tiene un máximo local y un mínimo local
- Bosquejar posibles gráficas de $p(x)$ para diversos valores de a.

12. Traza la gráfica de $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2$

13. Para cada una de las funciones siguientes determinar: los intervalos en dondė es creciente, los intervalos en donde es decreciente, los intervalos en donde es cóncava hacia arriba, los intervalos en donde es cóncava hacia abajo, los puntos en donde alcanza sus máximos locales y mínimos locales, los puntos en donde cambia su concavidad y un bosquejo gráfico.

- $f(x) = x^3 - 3x + 3$
- $f(x) = x^4 - 32x + 48$
- $f(x) = x^{2/3}$
- $g(x) = 3x^4 - 4x^3$
- $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

Resuelva las siguientes desigualdades

1.- $X^3+1 > X^2 + X$

2.- $\dfrac{X^4 + 1}{X^3 + 1} < 0$

3.- $\dfrac{1}{X-1} < X + 1$

4.- $\dfrac{1}{|X-4|} < \dfrac{1}{X + 7}$

5.- $\dfrac{|X - 4|}{2X} < 1$

Graficar las siguientes funciones

$h(x) = |x| + [x]$

$f(x) = |x^2-9|$

$g(x) = [x-4]$

$f(x) = \dfrac{x}{|x-1|}$

$h(x) = [\frac{1}{x}]$

$g(x) = |-(x-2)^2 + 1|$

$f(x) = [x^2]$

$f(x) \dfrac{[x]}{x}$

Determinar los siguientes límites

1.- $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-t}}{t}$

2.- $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}-1}$

3.- $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$

4.- $\lim\limits_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2+1}$

5.- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{8-4\sqrt{x}}{x-4}$

6.- $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

7.- $\lim\limits_{h\to o} \dfrac{\sqrt[3]{h+1}-1}{h}$

8.- $\lim\limits_{x\to o^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

9.- $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}}$

10.- $\lim\limits_{t\to o} (\frac{4}{t}-1)t$

11.- $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+5x}-x$

12.- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

13.- $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9} - \dfrac{6\sqrt{x-2}}{x^2-9}\right)$

14.- Determinar las asíntotas verticales y horizontales de la función

$$g(x)=-\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

FUNCIONES

* Un tractor cuesta $120,000 y cada año se devalúa 8% de su precio original. Encuentre una fórmula para el valor V del tractor después de t años.

* La compañía 2-K el robo perfecto tiene capacidad para producir de 0 a 100 refrigeradores diarios. Los gastos fijos de la planta son de $2200, el material y mano de obra para producir un refrigerador es de $151, escriba una fórmula para el costo total de producir X refrigeradores al día.

* Una agencia de renta de automóviles cobra $60 diarios por el alquiler de un automóvil, más $.40 por Km.

  a) Escriba la fórmula del costo total de la renta por día

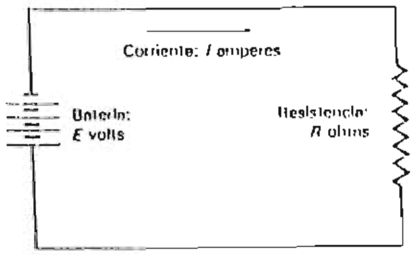
  b) Si usted renta un carro por un día, ¿Cuántos kilómetros podría recorrer por $220?

* De acuerdo con la ley de Boyle, la presión p (en libras por pulgada cuadrada) y el volumen v (en pulgadas cúbicas) de cierto gas satisfacen la condición $pv = 800$. ¿Cuál es el rango de valores posibles de la presión, dado que $100 \leq v \leq 200$?

* La relación entre la temperatura Farenheit F y la temperatura Celsius C está dada por $F = 32 + \frac{9}{5} C$. Si el rango de temperaturas en cierto día va de la mínima 70°F a la máxima de 90°F, ¿Cuál es el rango de la temperatura en grados Celsius?

2893122

* Un circuito eléctrico contiene una batería que proporciona E volts, en serie con una resistencia de R ohms, como se muestra en la figura. Entonces, la corriente de I amperios que fluye en el circuito satisface la ley de Ohms, $E = IR$. Si $E = 100$ y $25 < R < 50$, ¿cuál es el rango de valores posibles de I?



Circuito eléctrico simple.

* El periodo T (en segundos) de un péndulo simple de longitud L (en pies) está dada por $T=2\pi\sqrt{L/32}$, si $3<L<4$, ¿cuál es el rango de valores posibles de T?

* Se arroja una pelota directa hacia arriba con una velocidad inicial de 96 ft/s, por lo que su altura t segundos después es $y=961-16t^2$ ft, determine la altura máxima que alcanza la pelota construyento la gráfica de y como función de t.

* En el problema **que se encuentra en la página siguiente la producción diaria de cierto campo petrolero como función $p=f(x)$ del número x de nuevos pozos petroleros que se perforasen. Construya ahora la gráfica de f y úsela para encontrar el valor de x que maximiza P.

* Exprese el volumen v de una esfera en función de su área S.

* Dado que 0°C es lo mismo que 32°F y que un cambio de 1°C equivale a un cambio de 1.8°F, exprese la temperatura Celsius C en función de la temperatura Farenheit F.

* Una caja rectangular tiene 125 de volumen y una base cuadrada de longitud x en su arista. Exprese el área A del rectángulo con función de x.

** Un campo petrolero que contiene 20 pozos ha estado produciendo 4000 barriles diarios de pertróleo. Por cada nuevo pozo que es perforado, suponga que la producción diaria de cada uno disminuye 5 barriles. Escriba la producción diaria del campo petrolero en función del número x de pozos nuevos que se perforan.

* Un rectángulo tiene 100 unidades de área. Exprese su perímetro P como función de la longitud x de su base.

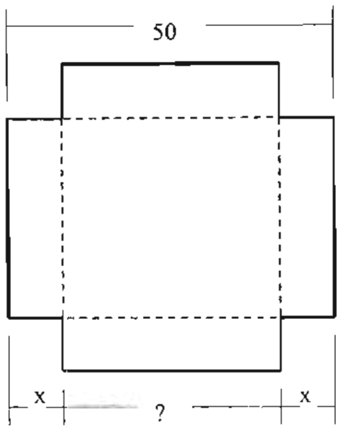
* Un rectángulo cuyo perímetro fijo es 36 gira en torno a uno de sus lados, S, para generar un cilindro circular recto. Exprese el volumen V de este cilindro en función de la longitud x del lado S.

* Un cilindro circularrecto tiene un volumen de 1000 in y el radio de su base es x. Exprese la superficie total A del cilindro como función de x.

* Una caja rectangular tiene una superficie total de 600 in y una base cuadrada cuya arista tiene longitud x. Exprese el volumen V de la caja en función de x.

* Se va a construir una caja sin tapa con una hoja cuadrada de cartón cuyo lado tiene una longitud de 50 in. Primero, se cortan cuatro pequeños cuadrados, cada uno de los cuales tiene lados de x pulgadas de longitud, de las cuatro esquinas de la hoja de cartón, como se indica en la figura.

Después, los cuatro faldones resultantes se doblan hacia arriba para formar los cuatro lados de la caja, que tendrá una base cuadrada y una profundidad de x pulgadas. Exprese el volumen V como función de x.



Dóblese hacia arriba las aristas
para construir una caja

Un banco paga 2% de interés mensual en cierto tipo de inversiones. La cantidad ganada por el interés mensual en cierto tipo de inversiones. La cantidad ganada por el interés puede ser reinvertida a así sucesivamente.

Por ejemplo suponga que se inicia la inversión con la cantidad C=\$100,000.00 Al cabo de un mes se ganará por intereses (0.02) x (\$100,000.00)= \$2000, o sea que el inversionista ya dispone de \$102,000.00, ¿de acuerdo?, adelante. Para el mes siguiente el inversionista gana por intereses (0.02) x (\$102,000.00)=\$2040 y el inversionista ya dsispone de la cantidad de \$104,040.00; ¿sigue de acuerdo? Bien , entonces:

a) Halle la cantidad total que posee el inversionista en términos del número de meses transcurridos.

b) Halle la función para una cantidad inicial cualquiera C.

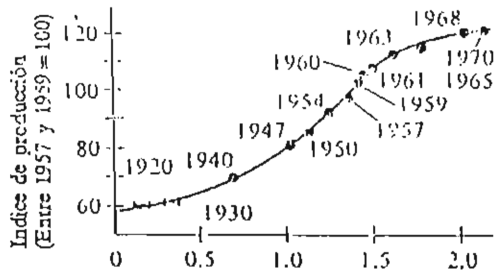
* Existen ciertos tipos de células que se reproducen por el fenómeno llamado de bipartición ("se dividen en dos") a intervalos de tiempo periódicos.

  a) Suponiendo que usted empieza a observar la división de una de tales células en cierto momento, exprese el número de células presentes en función del número de intervalos de tiempo transcurridos.

  b) Si en la segunda división y en las restantes una de las células reproducidas muere, exprese el número...

* Hallar las ecuaciones de las rectas L que son tangentes a las curvas $Y=x^2+1$, $Y=-x^2$

* La figura 4.3 aparece en "Energy Use in the United States Food System", de John S. Steinhart y Carol. E. Steinhart, en Perspectives on Energy, editado por Lon C. Ruedisili y Morris W. Firebaugh, Oxford, Nueva York, 1975. El gráfico muestra el producto del cultivo en función de la energía suministrada.



Energía suministrada al sistema producto de alimentos (unidad: 10^{15} kilocalorías)

Producto del sistema alimenticio en Estados Unidos, en función de la energía suministrada, desde 1920 hasta 1970.

Fig. 4.3

(a) ¿Cuál es el significado práctico de que la función tenga derivada positiva?

(b) ¿Y cuál el del punto de inflexión?

* Dos casas, A y B, están a distancia p una de otra. Y están a un mismo lado de una carretera y a distancias de ésta q y r, respectivamente. Hallar la longitud mínima de un camino que lleve de A a la carretera y de ésta a B.

* Sea $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, con a, b, c, y de constantes $a \neq 0$, ¿Cuantos puntos de inflexión puede tener f(x)?

* Un tubo de longitud b se transporta por un pasillo de anchura a<b y luego alrededor de una esquina C (ver Fig. 64). Durante el giro, y parte de 0, alcanza un máximo y vuelve de nuevo a 0 (inténtelo con un palo corto). Hallar el máximo en términos de a y b. (Sugerencias: Expresar y en términos de a, b y 0, donde a,b son constantes y θ variable.)

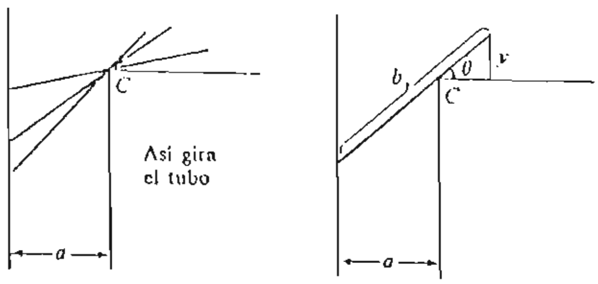
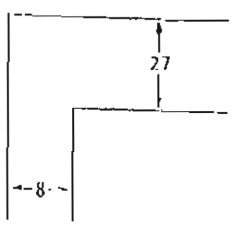


Figura 64

* En la figura 465 hay dos pasillos, que forman ángulo recto, de anchuras 8 y 27. Hallar la máxima longitud que puede tener una viga que pueda pasar por esa esquina (sugerencia: Hacer antes el ejercicio anterior).

Fig. 4 65



* Con una masa de yeso de volumen V Se forman dos esferas. ¿Para cuál distribución del yeso es máxima la superficie de las dos esferas? ¿Para cuál es mínima?

* Dos ruidosas discotecas, una de ellas cuatro veces tan ruidosa como la otra, están ubicadas en extremos opuestos de una cuadra de 1000 ft de larga. ¿Cuál es el punto más quieto de la cuadra, entre las dos discotecas? Suponga que la intensidad del ruido en un punto retirado de su fuente es proporcional a su potencia e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente.

* En un modelo simple de difusión de una enfermedad contagiosa entre miembros de una población de M personas, la incidencia de la enfermedad, medida como número de nuevos casos diarios, está dada en términos del número x de individuos ya infectados, por

$$P(x) = Kx(M - x) = kMx - Kx^2$$

donde k es alguna constante positiva. ¿Cuántos individuos de la población están infectados cuando la incidencia R es más alta?

Cuando una flecha es disparada desde el origen con velocidad inicial v_o y ángulo de inclinación inicial α (con respecto al eje horizontal que representa el suelo) su trayectoria es la curva

$$y = mx - \frac{16}{v_o^2}(1+m^2)x^2$$

donde $m = \tan\alpha$

(a) Encuentre la altura máxima alcanzada por la flecha (en función de m y v_o).

(b) ¿Para qué m (y por lo tanto, para qué α) viaja la flecha la distancia máxima horizontal?

* La gráfica de la velocidad de un modelo de cohete disparado en el tiempo $t=0$ aparece en al figura

(a) ¿En qué tiempo se agotó el combustible?

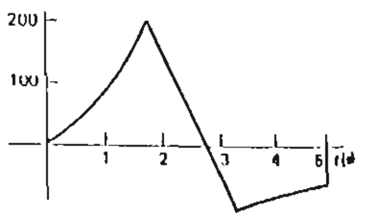
(b) ¿En qué tiempo se abrió el paracaídas?

(c) ¿Cuándo alcanzó el cohete su altura máxima?

(d) ¿En qué tiempo aterrizó el cohete?

(e) ¿A qué altura llegó?

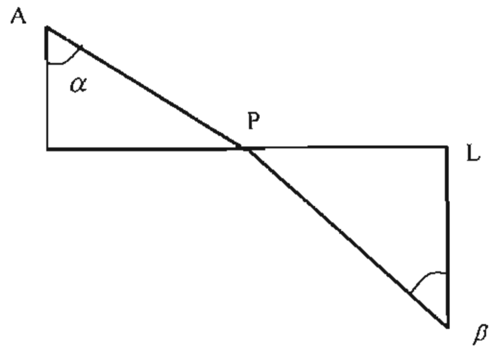
(f) ¿A qué altura estaba el punto en el que aterrizó?



Gráfica de la velocidad del cohete

*Un rayo de luz viaja desde A hasta B en un tiempo mínimo. El punto A está en un medio en el que la luz viaja con velocidad v_1 y el B es otro en el que la velocidad de la luz es v_2. Ambos medios están separados por la recta L. Probar que para el camino APB de tiempo mínimo se cumple

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v_1} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{v_2}$$



Leibniz resolvió este problema, con el cálculo, en un artículo publicado en 1684. (El resultado se llama ley de Snell de la refracción.)

Leibniz escribió, "otros hombres muy ilustrados habían intentado en muchas mas formas tortuosas lo que alguien versado en cálculo puede hacer en estas líneas como por arte de magia". (Ver C.H. Edwards Jr., the Historical Development of the calculus, pag. 259, Springer Verlang, N.Y.)

EVALUACIONES APLICADAS

PRIMER EXAMEN DE CÁLCULO

Trimestre 92-O

Octubre 20 de 1992

(3.0) 1. Obtener el conjunto solución de las desigualdades siguientes:

a) $|3x-5| \geq 3(5+x)$

b) $(x-3)(x+2) \geq 0$

(2.5) 2. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} |x|+1 & \text{si} \quad x \in (-2,2) \\ |x|-2 & \text{si} \quad x \notin (-2,2) \end{cases}$$

obtener: gráfica, dominio, rango, raíces, intervalos de monotonía. Determinar si es par o impar.

(1.0) 3. Trazar la gráfica de una función que satisfaga las siguientes condiciones:

- Es creciente en el intervalo [-6,0)
- Es constante de valor -2 en el intervalo [0,5]
- Es decreciente en (5,10]
- $f(-4) = 5 \quad f(7) = 6$

(2.0) 4. Obtener $(f+g)(x)$, para las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad -10 < x \leq 5 \\ x & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

(1.5) 5. Dada $f(x) = 1 - \sqrt{2-x^2}$, obtener dos funciones, $g(x)$ y $h(x)$, distintas a $f(x)$, para las cuales se cumpla:

$$f(x) = (h \circ g)(x)$$

¿ $3 \in D_{h \circ g}$? Justificar la respuesta.

SEGUNDO EXAMEN DE CÁLCULO I

Trimestre $92 - O$

3.0 **1.** Obtener el valor de los siguientes límites:

$$lim_{x \to -2^-} \frac{|2x+4|}{x^2+10x+16}$$

$$lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^4 - 5x^2 - 3} - \sqrt{x^4 + 15x^2 - 5}$$

1.0 **2.** Dibujar la gráfica de una función continua en todos los números reales, excepto en $\{-1, -4, 4, 6\}$, la cual tenga discontinuidades esenciales para $x = -1$ y $x = 6$; y discontinuidades removibles en $x = -4$ y $x = 4$.

3.0 **3.** Bosquejar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4}$, obteniendo: raíces, asíntotas, puntos de discontinuidad y su clasificación. Justifique todas sus respuestas.

1.5 **4.** Dar una raíz aproximada para $f(x) = -x^5 + 3x^2 - 1$, con una precisión de $\frac{1}{4}$ (es decir de 0.25). Justifique su respuesta.

1.5 **5.** Bosqueje la gráfica de una función $f(x)$ continua en todos los números reales, excepto en $\{-5, -1, 4\}$, la cual satisfaga:

- $\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -5^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -5^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -1} f(x) = 0$
- $f(-7) = -2$
- $f(1) = 5$
- $f(7) = -2$

CÁLCULO DIFERENCIAL e INTEGRAL I

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL 10 NOV 1992

1)Determinar los siguientes límites

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2}{x-2} - \frac{4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x}$$

2) Sea $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ *determinar* :

a) Dominio de f(x).
b) Los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje x.
c) Las ecuaciónes de las asíntotas verticales y horizontales.
d) Los puntos de discontinuidad y su clasificación.
e) Hacer un bosquejo de la gráfica.
f) El rango de función.

3) Calcule los valores de A y B para que la función sea continua en todos los números reales

$$f(x) = \begin{cases} Ax+1 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2+B & -2 < x < 2 \\ \frac{4}{x} & 2 \leq x \end{cases}$$

4)Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 1 - x - x^2$, en x=1

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Tercer examen parcial 7 Dic 1992

1) Derivar la función $\sqrt{x+\sqrt{1-x}}$

2)Dos atletas se disponen a correr los 100 m planos. Las distancias que cada uno de ellos recorre están dadas por:

$$S_1 = \frac{1}{5}t^2 + 8t \ , \ S_2 = \frac{1100t}{t+100}$$

Determinar cuál de los corredores es:
a)El más rápido en la salida.
b)El que gana la carrera.
c)El más rápido al cruzar la meta.

3) Trace la gráfica de una función continua que cumpla con :

f(0)=1 , f(2)=3 , $f'(0) = f'(2) = 0, f'(x) < 0$ si $|x-1| > 1$,$f'(x) > 0$ si $|x-1| < 1$

$f''(x) > 0 \quad si \quad x < 1, \quad f''(x) < 0 \quad si \quad x > 1$

4)Se desea que las páginas de un libro tengan un área de $900 cm^2$ con márgenes de 2.5 cm abajo y a los lados y de 1.5 cm arriba.
Determine las dimensiones de la página que darán la mayor área posible **para** el texto.

5)Se desea construir un almacén con un volumen de $100 m^3$ que tenga techo plano y base rectangular, cuya anchura sea tres cuartas partes de su longitud. El costo por metro cúbico de los materiales es de 36 dolares para **el piso, 54** dolares para los lados y 27 para el techo.
¿Qué dimensiones minimizan el costo?

2893122

EXAMEN GLOBAL DE CÁLCULO I

Trimestre 92-O. Diciembre 16 de 1992.

Los problemas marcados con $\star$ son los que componen la tercera parte.

(0.75) 1. *Encuentra el conjunto solución de las desigualdades siguientes:*

$$\frac{x - x^2}{(1+x)^2} < 0; \qquad |3x+6| \geq x - 1$$

(0.5) 2. *Dada la función*

$$\mathbf{f}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}+1 & x \geq 1 \\ |x| - 1 & -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

encuentra: gráfica, dominio, rango e intervalos de monotonía.

(0.75) 3. *Si* $\mathbf{f}(x) = \sqrt{1-x^2}$ *y* $\mathbf{g}(x) = \frac{1}{1-x^2}$, *encuentra* $D_{\mathbf{f}}$, $D_{\mathbf{g}}$, $(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(x)$, $(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\frac{1}{2})$ *y* $D_{\mathbf{g}\circ\mathbf{f}}$

(0.5) 4. *Calcula*

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(0.5) 5. *Para* $\mathbf{f}(x) = \frac{-2x^2+5x+3}{x-3}$, *determina en dónde es continua* $\mathbf{f}(x)$ *y clasifica sus discontinuidades. Justifica tu respuesta.*

(0.5) 6. *Crafica una función* $\mathbf{f}(x)$ *que cumpla los siguientes requisitos:*

- $\lim_{x \to -3^+} \mathbf{f}(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -3^-} \mathbf{f}(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 4^+} \mathbf{f}(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to 4^-} \mathbf{f}(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to 8^+} \mathbf{f}(x) = 5$
- $\lim_{x \to 8^-} \mathbf{f}(x) = 3$
- $\lim_{x \to +\infty} \mathbf{f}(x) = -1$
- $\lim_{x \to -\infty} \mathbf{f}(x) = 0$

(0.5) ⋆ *7. Deriva la función*

$$f(x) = (x-1)^{12}(1-6x)^{\frac{2}{3}}$$

(1.5) ⋆ *8. Un grupo de 100 venados se transporta a una isla pequeña. El grupo crece rápidamente, pero los recursos alimenticios empiezan a escasear y la población disminuye. Suponiendo que el número de venados que hay en* **t años** *está dado por* $N(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$, *determina:*

a) ¿En qué tiempo deja de crecer la población de venados?

b) ¿Cuál es su tamaño máximo?

c) ¿Cuándo se extingue la población de venados? Justifica todas tus respuestas.

(2.5) ⋆ *9. Dada la función* $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a) ¿Para qué valores de x *está definida* $f(x)$*?*

b) ¿Cuál es el comportamiento de $f(x)$ *cuando* $x \to \pm\infty$*?*

c) Determina la región en donde $f(x)$ *crece o decrece.*

e) ¿Tiene máximos o mínimos? Determínalos.

f) ¿En dónde es la gráfica de $f(x)$ *cóncava hacia abajo o hacia arriba y en dónde cambia su concavidad?*

g) Resume la información anterior en un bosquejo gráfico. Justifica todas tus respuestas.

(2.0) ⋆ *10. Un campo de atletismo consiste en un área rectangular con una región semicircular en cada extremo. El perímetro se utilizará como pista de 440 yardas. Encuentra las dimensiones del campo para las cuales el área sea máxima.*

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

FUNCIONES TRASCENDENTES

1.- Expresar en radianes los siguientes ángulos:

a) 40°, 135°, 315°, -720°, 210°, 402°, -68°

2.- Verifique que: $\cos(x - \frac{\Pi}{2}) = \operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen}(x + \frac{\Pi}{2}) = \cos x$

3.- Graficar las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}^2 x$

b) $y = |\operatorname{sen} x|$

c) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(t + \frac{\Pi}{4})$

d) $y = 2 \operatorname{sen}(2t + \frac{\Pi}{4})$

e) $y = 3 \cos(x - \frac{\pi}{2})$

f) $y = 2 \cos(x + \frac{\Pi}{6}) + 1$

4.- Determine los valores de x que satisfagan la ecuación:

a) $e^{e^x} = 100$

b) $3^{x-5} = 81$

c) $3^{x+5} = 3^{x+2} + 6$

d) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

e) $\log_4(x-9) + 2 \log_4 \sqrt{2x - 1} = 2$

f) $\log_{10} 2x + \log_{10}(x + 3) = \log_{10}(12x - 4)$

g) $1/2 \ln(x \quad + 2x) - \ln \sqrt{x + 2} = 0$

h) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 \log_2(3^{x-1} + 1)$

5.- Grafique las siguientes funciones por criterio de 1ª y 2ª derivada

a) $y = x - \ln x$ b) $y = \ln|x + 2|$ c) $y = \ln(x + 2)$

d) $y = \frac{1}{\ln x}$ e) $y = x \ln x$ f) $y = e^x - x$ $y = e^{1/x}$

g) $y = x\, e^{-x^2}$ h) $y = (1 - x)e^{-x}$ i) $y = xe^x$

6.- Para cada una de las siguientes funciones, determine si existe la inversa, y los números para los cuales está definida, también de la regla de correspondencia.

a) $f(x) = x^2 + x + 5$ $x > -1/2$

b) $f(t) = \frac{1}{t^2}$ si $-1 < t < 0$

c) $g(x) = \frac{x}{x + 2}$ si $x > -2$

d) $f(x) = -\sqrt{2 - x}$ si $x \varepsilon (-\infty, -2)$

e) $h(x) = 3 \cos 2x$ si $x \varepsilon (\frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{4})$

- Dada $f(x)$ determine un intervalo donde existe la inversa y hallar la derivada en el punto indicado

  a) $f(x) = x^5 + x^3 + 4$ y $f(1) = 6$ entonces $(f^{-1})'(6) =$

  b) $f(x) = \ln(x - 1) + 2x$ y $f(2) = 4$ entonces $(f^{-1})'(4) =$

  c) $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln x}$ $f(e^3) = \dfrac{e^3}{-2} \Longrightarrow (f^{-1})'(\dfrac{e^3}{-2}) =$

  d) $f(x) = e^{3x} + e^{-x} + 2$ $f(0) = 4 \Longrightarrow (f^{-1})'(4) =$

  e) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{e^x - 1}$ $f(1) = \dfrac{e^{-1}}{e' - 1} \Longrightarrow (f^{-1})'(\dfrac{e^{-1}}{e - 1}) =$

8.- Verifique que son identidades

  a) $\operatorname{sen} \arccos x = \sqrt{1 - x^2}$

  b) $\cos 2 \arctan x = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

  c) $\tan \operatorname{arcsen} x = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

  d) $\tan 2 \arctan x = \dfrac{2x}{1 - x^2}$

  e) $\sec 2 \cos^{-1} x = \dfrac{1}{2x^2 - 1}$

9.- Sin calculadora determine:

a) $\operatorname{sen} 2 \arccos \frac{2}{3} =$

b) $\operatorname{sen}(\arccos \frac{3}{5} + \arccos(\frac{5}{13})) =$

c) $\cos(\arccos \frac{4}{5} + \operatorname{arcsen}(\frac{12}{13})) =$

10.- Obtenga y' si y esta dada por:

$y = \operatorname{sen} \arctan e^{3x}$

$y = \sec \operatorname{arcsen} e^{-x}$

$y = (\sec^{-1} x)^3$

$y = \dfrac{\csc^2 3x}{1 + \operatorname{sen}^2 3x}$

$y = \tan 3x \cdot e^{\tan x}$

$y = \operatorname{sen} \arctan 2x$

$y = \operatorname{arcsen} \ln \frac{1}{x^2}$

$y = \arctan \cos t^3$

$y = \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x^2}$

$y = \ln(\tan 2x - \sec 2x)$

$y = \dfrac{\cot e^{x2} + \csc x}{x^2 + \operatorname{sen} x}$

$y = \cos(x^2 - 1) - \tan^2 x^2$

$xe^y + 2x - \ln y = 4$

$e^{\operatorname{sen} y} + xy^2 - y + 3 = x + 1$

11.- Verifique que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} - \ln(1 - e^{-x})$

es decreciente para $x > 0$

12.- Pruebe que si $a < b$ entonces $e^{-a} > e^{-b}$

13.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado

a) $y = x\ e^{-x^2}$ $\qquad x = 1$

b) $y = xe^x$ $\qquad x = 3$

c) $y = \arctan 2x$ $\qquad x = \sqrt{3}/2$

d) $y = \arccos x$ $\qquad x = 1/\sqrt{2}$

e) $y = \ln x^3$ $\qquad x = e$

f) $y = \dfrac{1}{\ln x}$ $\qquad x = 2$

14.- Sea $f(x)$ una función tal que $f'(x) = f(x)$ y $f(0) = 1$ determinar f en términos de e^x

1.- Encuentre la suma de Riemann de $f(x) = \cos x$ con la partición:

$0 < \frac{\pi}{2} < \frac{5}{4}\pi < \frac{7}{4}\pi < 2\pi$ y $x_1* = \pi/4$, $x_2* = \pi$, $x_3* = \frac{7}{6}\pi$

$x_4 = \frac{7}{4}\pi$.

2.- Determine el valor aproximado de las siguientes integrales; exprese su respuesta hasta con 5 cifras

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{1 + e^x}$ con $n = 5$ y $x_i* =$ punto medio del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$

b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{1 + x} = n = 8 \quad x_i* = x_i$

c) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx$, $n = 5$

3.- Obtenga la derivada de las siguientes funciones:

$$g(x) = \int_0^{\cos 2x} \sqrt{\operatorname{sen} t}\, dt \qquad f(x) = \int_{-x}^{2} \frac{dw}{1 + \operatorname{sen}^2 w}$$

$$h(x) = \int_{0}^{e^{-5x}} \sqrt{\ln u + u}\, du \qquad F(x)\ \text{arcsen}\ e^{2x} \int_{0}^{2^{-x}} \sqrt[3]{\tan t}\, dt$$

$$g(w) = \int_{\ln w}^{w^3} \frac{1}{(1+t)^2}\, dt$$

4.- Si $f(x) = \int_{1}^{x} \sqrt[3]{1+t^2}\, dt$

a) Muestre que f es una función uno a uno en $(-\infty, \infty)$

b) Encuentre $(f^{-1})'(0) =$ si $f(1) = 0$

5.- Si la velocidad de un cohete después del despegue es $x'(t) = 0.3t^2 + 4t$ *m/sec*. Determine la distancia que recorre en el tiempo de $t = 5$ sec a $t = 8$ sec.

6.- Efectúe las siguientes integrales por cambio de variable:

$$\int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x\, e^{\sqrt{x}}}} \qquad \int \text{sen } x \text{ sen } \cos x\, dx \qquad \int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\, dx \qquad \int \frac{\ln x^4}{x}\, dx$$

$$\int \frac{\ln^4 x}{x}\,dx \qquad \int \sqrt{x}\,(1 + x\sqrt{x})^{5/3}dx \qquad \int \frac{dx}{1 + \cos x} \qquad \int \frac{dx}{x^{1/3}(4 + x^{2/3})}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 - e^x}}\,dx \qquad \int \frac{dt}{2t\sqrt{4t^2 - 9}} \qquad \int \frac{dx}{e^x\sqrt{1 - e^{-2x}}} \qquad \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$\int \frac{dx}{e^x - 2} \qquad \int \frac{e^{-3x}}{9 + e^{-6x}}\,dx \qquad \int \frac{dx}{x^{3/2} + x^{1/2}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x} + 9} \qquad \int 5^x 2^x\,dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{x - 1}} \qquad \int \frac{2\,dt}{e^{-t} + 1} \qquad \int \frac{\operatorname{sen} z \cos z\,dz}{\sqrt{3 \operatorname{sen} z + 5}} \qquad \int \sqrt{e^x - 4}\,dx$$

7.- Efectúe las siguientes integrales por partes:

$$\int x^n \ln x^m\,dx \qquad \int x \csc^2 x\,dx \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx \qquad \int_0^{\pi/4} e^{3x} \operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int \ln(x^2 + 4)dx \qquad \int \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x\,dx \qquad \int \frac{2x + 3\,dx}{\sqrt{x + 3}} \qquad \int \operatorname{sen} \sqrt{x}\,dx$$

$$\int e^{2z} \operatorname{sen} e^{z}\, dz \qquad \int e^{\arccos x}\, dx \qquad \int e^{-\sqrt{x}}\, dx \qquad \int \sqrt{t} \operatorname{arc\,sen} \sqrt{t}\, dt$$

$$\int x^3 e^{-x^2}\, dx \qquad \int \frac{\cos \ln x}{x^3}\, dx \qquad \int \frac{\operatorname{arc\,tan} x}{x^2}\, dx \qquad \int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x^2}\, dx$$

Efectuar las siguientes integrales:

$$\int \operatorname{sen}^3 2t\, dt \qquad \int \cos^4 \frac{t}{2}\, dt \qquad \int \operatorname{sen}^2 3t \cos^2 3t\, dt \qquad \int \operatorname{sen}^3 x \sqrt{\cos x}\, dx$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}\, dx \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \tan x} \qquad \int \cot^3 x \csc^4 x\, dx \qquad \int \cos^4 x \operatorname{sen}^3 x\, dx$$

$$\int \frac{\tan^3 t}{\sqrt{\sec t}}\, dt \qquad \int \tan^2 x \sec^3 x\, dx \qquad \int \sec^4 4x\, dx \qquad \int \tan^5 x\, dx$$

$$\int \cot^2 2x \csc^4 2x \, dx \qquad \int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x \, dx \qquad \int \operatorname{sen} 2x \cos 5x \, dx$$

$$\int \cos 4x \cos \frac{x}{2} \, dx \qquad \int (1 - x^2)^{3/2} \, dx \qquad \int \sqrt{9 + 4x^2} \, dx \qquad \int \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x} \, dx$$

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 16}} \qquad \int \frac{dx}{(x^2 - 5)^{3/2}} \qquad \int \frac{dx}{x^2(x^2 + 9)^{3/2}} \qquad \int \frac{dx}{(4 - x^2)^2}$$

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} \qquad \int \frac{dx}{2x^2 + 12x + 20} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{4 - 2x - x^2}} \qquad \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

9.- Efectuar las siguientes integrales:

$$\int \frac{2x^2 + 13x + 18}{x^3 + 6x^2 + 9x} \, dx \qquad \int \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 - x^2} \, dx$$

$$\int \frac{9x^2 - 36x - 30}{x^3 - 5x^2 - 6x}\,dx \qquad \int \frac{x^5 + x^3 + 13x^2 + 18}{x^3 + 8}\,dx$$

$$\int \frac{x^4 + x^3 + 8x^2 - 2x + 8}{x^3 + x^2 + 3x - 5}\,dx$$ y $x = +1$ raíz del denominador

$$\int \frac{x^2 - 4x + 7}{x^3 - x^2 + x + 3}\,dx$$ y $x = -1$ raíz del denominador

$$\int \frac{2x^3 + 8x^2 + 8x + 18}{x^4 + 2x^3 + x^2}\,dx \qquad \int \frac{x^4 + 3x^2 + x + 1}{x^3 + x}\,dx$$

APLICACIONES

I. Calcule el área de la región limitada por las curvas dadas:

1.- $y = x^2 - 6x + 8$ $\qquad y = -x^2 + 6x - 8$

2.- $y = 1/x, \quad y = x^2, \quad x = 1/2, \quad x = 2$

3.- $y = e^x, \quad y = e^{3x}, \quad x = 1$

4.- $y = e^{-2x}, \quad y = -e^x, \quad x = 0, \quad x = 1$

5.- $y = x^2, \quad y = |x| + 1$

6.- $y = x^3 - 12x, \quad y = x^2$

7.- $y = \text{sen } x, \quad y = \cos x, \quad x = -\pi/2$

8.- $y = x^3, \quad y = -x, \quad y = x + 6$

9.- $y^2 - 2x = 0, \quad y^2 + 4x - 12 = 0$

10.- $x + 2 = y^2 - 2y \quad x - y = -2y^2 + 4$

11.- Calcule el área de la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$.

12.- Calcule el área del círculo $x^2 + y^2 = r^2$

13.- Calcule el área de la región limitada por $y = \dfrac{x^2}{(4 - x^2)^{3/2}}$ eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = 1$

II. Calcule la longitud de la curva en el intervalo dado

1.- $y = \ln x$ para $1 \leq x \leq 2$

2.- $y = x^2$ para $0 \leq x \leq 4$

3.- $y = x^{3/2}$ para $\frac{5}{9} \leq x \leq 4$

4.- $y = e^{-x}$ para $0 \leq x \leq 1$

5.- $y = \ln \cos x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

III. Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región:

1.- $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ alrededor del eje x

2.- $y = \text{sen } x$, $y = 0$ alrededor del eje x

3.- $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$ $x = 1$ alrededor del eje y

4.- $y = x^2$, $y = 1 + x - x^2$ alrededor del eje x

5.- $y = 4x^2$, $y = 4x$ alrededor del eje x

6.- $y = e^{-2x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ alrededor de $y = -1$

7.- $y = \ln x^2$, $y = 0$, $x = e$ alrededor de $x = -1$

8.- $y = \arctan x$, $y = 0$, $x = 1$ alrededor de $x = 2$

9.- $y = x^2 + 3$, $y = 4$, $x = 0$ alrededor de $y = -2$

10.- $y = 1 - x^2$, $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 2$ alrededor de $y = -1$

IV. Determinar si cada una de las siguientes integrales converge o no; en caso afirmativo evaluarla:

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \qquad \int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3}\, dx \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

$$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x + 1}} \qquad \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^n}\ n \geq 2 \qquad \int_{0}^{2} \ln x\, dx \qquad \int_{0}^{2} \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\int_{0}^{1} \frac{e^x\, dx}{\sqrt{e^x - 1}} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\, dx}{x^4 + 4} \qquad \int_{0}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}} \qquad \int_{2}^{\infty} \frac{\ln 1/x}{x^2}\, dx$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{t^4 + t^2} \qquad \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^3 + x}$$

V. Calcule el valor aproximado del número indicado y estime el error en la aproximación

$\ln 7/9$ con $n = 4$

$\sqrt{102}$ con $n = 3$

sen 62°	con	$n = 4$
e	con	$n = 8$
cos 3°	con	$n = 5$
sen 89°	con	$n = 3$
$\frac{1}{\sqrt{5}}$	con	$n = 2$
$e^{1/8}$	con	$n = 3$

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

1.- Suponga que se bombea agua hacia un tanque inicialmente vacío, la razón de flujo del agua al tanque, después de t minutos es de $50-t$ galones por minuto. ¿ Qué cantidad de agua fluye al tanque durante la primera media hora ?

2.- Se lanza un cohete verticalmente al aire, su velocidad t segundos después es $v(t) = 20t + 50$ m/seg. ¿ Qué distancia recorrerá durante los primeros 100 segundos ?

3.- Se determinó que en 1940, la densidad de población a t millas del centro de la ciudad de Nueva York era aproximadamente $120\ e^{-0.2t}$ miles de personas por milla cuadrada. Estime el número de personas que vivían en 1940, dentro de un radio de 2 millas del centro de la ciudad.

4.- ¿ Qué cantidad de trabajo se debe realizar para impulsar un satélite de 1000 lb en dirección vertical, desde la superficie de la tierra a una órbita a 1000 millas sobre dicha superficie ? (Radio de la tierra 4000 millas.)

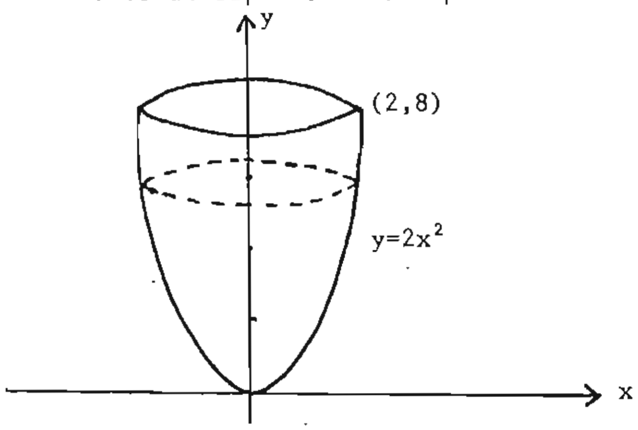
5.- Una cadena de 20 pies pesa 5 lb/pie, yace en el suelo. ¿ Cuánto trabajo es necesario para elevar uno de sus extremos hasta 20 pies de altura de manera que quede toda extendida ?

6.- Una cadena de 15 pies de largo y que pesa 3 lb/pie está suspendida verticalmente desde 15 pies de altura. ¿ Cuánto trabajo hace falta para elevar toda la cadena hasta 15 pies de altura ?

7.- Hallar el trabajo necesario para elevar el extremo inferior de la cadena del ejercicio anterior hasta 15 pies de altura, dejando la cadena doblada y en posición vertical.

8'- Una grúa de demolición tiene una bola de 500 lb suspendida a un cable de 40 pies, cuya densidad es 0.7 lb/pie. Hallar el trabajo necesario para enrollar 15 pies de la cadena.

9.- El depósito de la siguiente figura tiene 8 pies de altura y 2 pies de radio en su parte superior. Si se llena hasta una altura de 6 pies con un aceite que pesa 50 lb/pie³, hallar el trabajo requerido para bombear todo ese aceite sobre el borde superior del depósito



10.- Un depósito tiene la forma de un cono circular recto y está lleno de agua. Si la altura del depósito es de 10 pies y el radio en la cúspide es de 4 pies. Encuentre el trabajo realizado al bombear agua hasta el borde superior del depósito $\delta = 62.4$ lb/pie^3

11.- Encuentre el trabajo realizado al bombear todo el aceite de densidad $\rho = 50$ lb/pie^3 sobre el borde de un recipiente cilíndrico apoyado sobre su base. Si el radio de la base es de 5 pies, su altura es de 10 pies y está lleno de aceite

2.- Un recipiente esférico de almacenamiento tiene 12 pies de radio, la base del recipiente esta al nivel del suelo. Encuentre la cantidad de trabajo realizado para llenar el tanque con aceite que pesa 50 lb/pie^3 si todo el aceite se encuentra al principio al nivel del suelo.

3.- Un tanque cilíndrico de 3 ft de radio y 10 ft de longitud yace sobre su cara lateral en un piso horizontal. Si se llena al principio con gasolina que pesa 40 lb/ft^3, ¿ qué cantidad de trabajo se realiza para bombear esta gasolina a un punto 5 ft arriba del tope del tanque ?

4.- Una presa tiene una compuerta vertical en forma de trapecio que mide 8 ft en su lado superior, 6 en su base y 5 de altura. ¿ Cuál es la fuerza total ejercida sobre la compuerta si su lado superior está 4 ft bajo la superficie del agua ?

15.- El fondo de una piscina es un plano inclinado que tiene 2 ft de profundidad en un extremo y 10 ft en el otro. Si dicha piscina mide 40 ft de largo y 30 ft de ancho. ¿ Cuál es la fuerza total que actúa sobre uno de sus laterales de 40 ft ?

16.- Una claraboya cuadrada en el lateral vertical de un barco mide 1 ft de lado. Hallar la fuerza total que soporta, suponiendo que el lado superior del cuadrado está 15 ft bajo el agua.

17.- Un centro de piscicultura tiene un gran tanque lleno de agua con un cristal circular lateral para poder observar el interior. Calcular la fuerza sobre ese cristal si mide 1 ft de radio y su centro está 3 ft bajo la superficie del agua.

LAS FUNCIONES TRASCENDENTES

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Obtener la equivalencia en *radianes* de cada uno de los siguientes ángulos:

   a) $75°$
   b) $60°$
   c) $735°$

2. Encontrar la equivalencia en *grados* de cada uno de los ángulos siguientes, los cuales están medidos en *radianes*:

   a) $\frac{3}{2}\pi$
   b) 4
   c) 14.31

3. A partir de la identidad

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - sen\, x\, sen\, y$$

   demostrar:

$$sen(x+y) = sen\, x\, cos\, y + sen\, y\, cos\, x$$

   sugerencia: utilizar $sen\, x = cos(x - \frac{\pi}{2})$ y $cos\, x = sen(x + \frac{\pi}{2})$

4. Verificar que para todo número real x se cumple:

   a) $sen(\pi - x) = sen\, x$
   b) $cos(\pi - x) = -cos\, x$
   c) $sen(\pi + x) = -sen\, x$
   d) $cos(\pi + x) = -cos\, x$
   e) $tan(\pi - x) = -tan\, x$
   f) $tan(\pi + x) = tan\, x$
   g) $tan(\frac{\pi}{2} - x) = cot\, x$

h) $cot(\frac{\pi}{2} - x) = tan\, x$

5. Probar las identidades:

$$cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\, 2x)$$

$$sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\, 2x)$$

6. Expresar $sen\, 3x$ y $cos\, 3x$ en términos de $sen\, x$ y $cos\, x$.

7. Probar

$$tan(x + y) = \frac{tan\, x + tan\, y}{1 - tan\, x\, tan\, y}$$

$$tan(x - y) = \frac{tan\, x - tan\, y}{1 + tan\, x\, tan\, y}$$

8. Trazar la gráfica de las siguientes funciones, mediante desplazamientos horizontales o verticales, o expansiones y contracciones:

   a) $f_1(x) = -cos\, 3x$
   b) $f_2(x) = -sen(x - 1)$
   c) $f_3(x) = \frac{1}{2} sen(\frac{x}{3} + \pi)$
   d) $f_4(x) = 3 sen(x + \frac{\pi}{4})$
   e) $f_5(x) = 1 - sen\, 2x$
   f) $f_6(x) = -sen(2x - \frac{\pi}{2})$

9. Obtener la amplitud, el periodo y el ángulo de defasamiento para cada una de las funciones del problema 8.

10. Utilizando el concepto de *amplitud modulada* trazar un bosquejo de la gráfica de las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = x\, sen\, x$
   b) $f_2(x) = cos\, x\, sen\, \frac{x}{2}$
   c) $f_3(x) = cos\, x\, cos \frac{x}{3}$
   d) $f_4(x) = sen\, x\, sen \frac{x}{2}$
   e) $f_5(x) = x^2 sen\, x$

11. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = cos^2 x$
   b) $f_2(x) = cos\, x^2$
   c) $f_3(x) = 2 sen\, x\, cos\, x$

d) $f_4(x) = \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$

e) $f_5(x) = \sqrt{sen\, x}$

f) $f_6(x) = \sqrt{2cos\sqrt{x}}$

g) $f_7(x) = cos^4(sen^2 3x)$

h) $f_8(x) = tan^2(2\sqrt{x})$

i) $f_9(x) = csc(x^2 - 2x)$

j) $f_{10}(x) = cot(x\, cos 2x)$

12. Sea $f(x) = |cos\, x|$. Graficar $f(x)$. ¿Es derivable $f(x)$ en todo su dominio? Justificar la respuesta.

13. Utilizando técnicas de derivación (máximos, mínimos, crecimiento, concavidad, etc.) graficar:

a) $f_1(x) = sen^2 x$

b) $f_2(x) = sen\, x^2$. ¿Es periódica?

LA FUNCIÓN INVERSA

1. Para cada una de las funciones siguientes determinar el intervalo o los intervalos en donde está definida la función inversa, obtener una expresión para ella, si es posible, y obtener la derivada de la función inversa en el punto indicado.

a) $f_1(x) = 3x - 4$, en el punto (1,-1)

b) $f_2(x) = \sqrt[3]{5x-7}$, en el punto (3,2)

c) $f_3(x) = x^5 + x^3$, en el punto (1,2)

d) $f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, en el punto $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

e) $f_5(x) = \frac{1}{x}$, en el punto $(2, \frac{1}{2})$

f) $f_6(x) = 3cot(\frac{x}{2})$, en el punto $(\pi, 0)$

g) $f_1(x) = \begin{cases} x+3, & x < 1 \\ x, & x \geq 1 \end{cases}$, en el punto (0,3)

h) $f_7(x) = \frac{10-14x}{35x-25}$, en el punto $(1, -\frac{2}{5})$

2. Obtener la gráfica de la función inversa a partir de la gráfica de la función que aparece en el problema anterior, incisos a), d), e), f), g) y h).

3. Sea $f(x) = x + sen\, x$. Nótese que $f(\frac{3}{2}\pi) = \frac{3}{2}\pi - 1$. Calcular $(f^{-1})'(\frac{3}{2}\pi - 1)$

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1. Definir las funciones *Arco Cotangente* y *Arco Cosecante*, graficarlas a partir de las gráficas de las funciones Cotangente y Cosecante. Obtener su derivada mediante la derivada de la Cotangente y la Cosecante.

2. Probar la identidad

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

   Sugerencia: utilizar la identidad de la tangente de la suma de dos números, siendo éstos $\arctan x$ y $\arctan y$.

3. Probar que se cumple, para $x \neq 0$:

$$\frac{d}{dx}(arccot x - \arctan(\frac{1}{x})) = 0$$

4. Derivar las funciones siguientes:

   a) $f_1(x) = arccos(sen\sqrt{x})$
   b) $f_2(x) = x^3 \cos x^2\, arccos\, x^2$
   c) $f_3(z) = tan(z^2 + arcsen\, 3z)$
   d) $f_4(t) = arccsc\,(\frac{1}{t})$
   e) $f_5(\theta) = sen(2arcsen\,\theta)$
   f) $f_6(x) = (arccot\, x^2)^2$

5. Despejar la variable x en las siguientes ecuaciones trigonométricas:

   a) $\arctan 2y = \arctan x^2 + C$
   b) $3y - 5sen\, x = 6$
   c) $\cos y \cos x = 0$
   d) $\sqrt{12y} - 3\cos x^2 = 1$
   e) $N(x) = 10 + sen(\frac{\pi}{24}x)$

6. Resolver las ecuaciones siguientes, es decir, encontrar todos los números x que satisfagan:

   a) $(\tan x)^2 = 1$
   b) $12sen\, x = 6$

LA FUNCIÓN LOGARITMO

1. A partir de la gráfica de $\ln x$ y mediante translaciones obtener la gráfica de las funciones siguientes:

   a) $f_1(x) = \ln -x$

   b) $f_2(x) = \ln(x-1)$

   c) $f_3(x) = -\ln x$

   d) $f_4(x) = 2 + \ln(1-x)$

   e) $f_5(x) = \ln|x|$

2. Calcular el valor de las expresiones siguientes, sin el empleo de la calculadora:

   a) $\ln(4e) - 2\ln 2^3 - \ln(\frac{1}{16})$

   b) $\ln(\sqrt[3]{e})$

   c) $\ln(\sqrt[3]{e^2})$

   d) $\ln(3e) + (1 - \ln 3)$

3. Verificar que se cumple las igualdades siguientes, sin utilizar calculadora (sugerencia: emplear propiedades del logaritmo):

   a) $\frac{7}{6}\ln(3+2\sqrt{2}) = \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1) + 4\ln(\sqrt{2}+1)$

   b) $\ln(x+\sqrt{x^2+1}) = -\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

   c) $\ln(\frac{1-\cos x}{x}) = 2\ln(sen\, x) - \ln(x(1+\cos x))$

4. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

   a) $\ln(x^2-1) = \ln(x-2) + \ln(x-3)$

   b) $\ln(3-x) + \ln 2 - \ln(2x+1) = 0$

   c) $\ln(1+x) - \ln(1-x) = 1$

   d) $\ln(2-x) + \ln(x+11) = \ln(2x-3)$

   e) $2\ln 2 + \ln(x^2-1) = \ln(4x-1)$

5. ¿Qué ángulo forma con el eje X la recta tangente a la curva $y = \ln x$ en el punto (1,0)?

6. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de $f(x) = \ln(e+x^2)$ en el punto (1,0).

7. Calcular la derivada de las funciones siguientes:

   a) $f_1(x) = \ln(sen^2 x)$

b) $f_2(x) = sen(\ln(2x+3))$

c) $y = \ln(2x+5)$

d) $y = (\ln(x+1))^2$

e) $f_3(x) = 2\ln(arcsen\, x)^2$

f) $y = \frac{1}{\ln x}$

g) $f_4(t) = \frac{t}{\ln t}$

h) $y = \frac{\ln 2x}{\cos x}$

i) $y = \ln(\sqrt{1-x^2})$

j) $f_5(x) = x(\ln x)^{\frac{1}{3}}$

k) $f_6(x) = \ln\left|\frac{2x+1}{x-2}\right|$

l) $y = \tan(\ln\sqrt{x})$

8. Determinar los máximos, mínimos y los intervalos de crecimiento de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

9. Obtener los máximos y mínimos de $f(x) = x\ln x - 3x$

10. Utilizando técnicas de derivación graficar:

a) $f_1(x) = x + \ln x$

b) $y = \ln(x^2)$

c) $y = x^2 + \ln x$

d) $y = \frac{1}{\ln x}$

e) $f_2(x) = (\ln x)^2$

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

1. A partir de la gráfica de $f(x) = e^x$ y mediante translaciones, expansiones o contracciones obtener la gráfica de las funciones siguientes:

a) $f_1(x) = e^{-x}$

b) $f_2(x) = -e^x$

c) $f_3(x) = e^{x+1}$

d) $f_4(x) = e^{1-2x}$

e) $f_5(x) = e^{-5x} + 1$

f) $f_6(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

g) $f_7(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

2. Simplificar al máximo las siguientes expresiones:

a) $\ln(e^{\frac{1}{x}})$

b) $\ln(x^2 e^{-3x})$

c) $e^{\ln(\frac{1}{x})}$

d) $e^{\ln 2+\ln 3}$

e) $e^{5\ln x^3}$

f) $(e^2)^{-x}\frac{e^x}{e^{-x}}$

g) $\frac{e^2-e}{e}$

h) $e^{1-x}e^{1+x}$

i) $\frac{(3e)^2-9}{e+1}$

j) $\frac{2e^{2x+1}-(e^x)^2}{e^x(2e-1)}$

3. Obtener las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$ para las funciones

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad g(x) = e^{3x}$$

4. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = e^{\sqrt{x}}$

b) $f_2(x) = \cos(e^{2x+1})$

c) $y = e^{sen\, x^2}$

d) $y = e^{2x} sen\, 3x$

e) $f_3(x) = e^x sen(e^x)$

f) $y = \arctan(e^{-\frac{1}{2}^2 x})$

h) $f_4(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

i) $y = e^{\frac{1}{x}}$

j) $y = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$

5. Verificar si la función $y(x) = e^{-\frac{x}{2}}(\cos x + sen\, x)$ satisface la siguiente ecuación:

$$y" + y' + \frac{5}{4}y = 0$$

6. Obtener una fórmula para la derivada de orden n de las funciones:

a) $f(x) = \ln x$

b) $g(x) = xe^x$

7. Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de $f(x) = 2e^{-x^2}$

8. Obtener los intervalos de concavidad de $g(x) = xe^x$

9. Obtener $\frac{dy}{dx}$ para la función y definida por la ecuación siguiente:

$$e^x \tan y = xe^{-3xy}$$

($\frac{dy}{dx}$ quedará en términos de x y de y)

10. Utilizando técnicas de derivación (máximos, mínimos, crecimiento, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas, etc.) graficar:

    a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

    b) $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

    c) $y = e^{-x^2}$

LAS FUNCIONES EXPONENCIAL GENERAL Y LOGARITMO BASE a

1. A partir de las gráficas de a^x y $\log_a x$ graficar mediante translaciones :

    a) $f_1(x) = 4^{x-1}$

    b) $f_2(x) = 2^{2-x}$

    c) $f_3(x) = 9^x - 5$

    d) $f_4(x) = \log_9(x-5)$

2. Resolver las ecuaciones siguientes:

    a) $\log_5(2x+5) + \log_5(2x-5) = 2$

    b) $2\ln(1+x) = 1 + \ln(1-x)$

    c) $(5^x - 1)(5^x - 25) = 0$

    d) $7^{x+2} - 7 = 0$

    e) $2^{x-5} - \frac{1}{2} = 0$

    f) $4^x + 3\,2^x - 4 = 0$

3. Expresar $\log_5(\frac{3^6}{432})^{\frac{5}{2}}$ en términos de $\ln 2$, $\ln 3$ y $\ln 5$.

4. Verificar que se cumple las siguientes igualdades mediante las propiedades de logaritmo, sin utilizar la calculadora:

    a) $\log_{\frac{1}{9}}(\frac{1}{243}) = \frac{5}{2}$

    b) $\log_{36}(\frac{1}{\sqrt{6}}) = \frac{-1}{4}$

    c) $\log_{\sqrt{27}}(81) = \frac{8}{3}$

    d) $\log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2}$

5. Si $f(x) = 3^{-x}$ y $g(x) = -\cos 2x$, obtener el valor de $f(g(\frac{\pi}{4}))$:

6. Despejar la variable x en las siguientes ecuaciones:

   a) $100^x = 1900$
   b) $\sqrt[3]{5^{2x+1}} = 2$
   c) $(\frac{2}{7})^x = (\frac{7}{2})^{10}$

7. Derivar las funciones siguientes:

   a) $f_1(x) = 3^{6x-2}$
   b) $f_2(x) = 10^x \ln x$
   c) $y = 3^{1-x} \log_2(5x - 1)$
   d) $y = 2^x + 2^{2^x}$
   e) $h(x) = 5^{sen(\frac{x}{2})}$
   f) $y(x) = \log_{10}(x^2 + 6x + 1)$
   g) $f_4(x) = sen(\log_8 x)$
   h) $f_5(x) = 10^{x^2-2x}$
   i) $f_6(x) = (sen\, x)^{\cos x}$
   j) $f_7(x) = x^{sen\, x}$
   k) $f_8(x) = \frac{\cos^2 x\sqrt{1+sen^2 x}}{\tan^2 x}$, utilizando derivación logarítmica.

LA REGLA DE L'HOSPITAL

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{5x}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x - sen\, x}$

c) $\lim_{x\to \infty} x^2 e^{-x}$

d) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\cot x)}{e^{\csc^2 x}}$

e) $\lim_{x\to 4} \frac{\tan(\frac{\pi}{x})-1}{x-4}$

f) $\lim_{x\to 3} \frac{2-\sec(\frac{\pi}{x})}{x-3}$

g) $\lim_{x\to 0}(sen\, x)^x$

h) $\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{b^x}$, a y b, constantes.

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{\cos(3x)-1}$

j) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

k) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

j) $\lim_{x\to 0-}(e^x - 1)^{3x}$

C. APLICACIONES

1. (Medicina) La propagación de una epidemia de duración prolongada está descrita por la ecuación

$$P(t) = \frac{32,000}{1 + 50e^{-0.1t}},$$

en donde $P(t)$ es el número de gente infectada t semanas después del brote de la epidemia, ¿Cuánto tiempo deberá pasar para que 2000 personas lleguen a estar infectadas?

2. El número de calculadoras verificadas diariamente por un trabajador de cierta compañía de ensamblado de calculadoras, después de t horas de entrenamiento está dado por

$$N(t) = 60(1 - e^{-0.2t})$$

¿En cuánto tiempo probará 60 calculadoras?

3. La magnitud R de un temblor de intensidad I, en la escala de Richter, está dada por

$$R = log_{10}(\frac{I}{I_0})$$

en donde I_0 es una intensidad estándar (de un temblor utilizado como referencia) usada por comparación. Así , un temblor de magnitud $R = 4$ en la escala Richter significa que

$$4 = log_{10}(\frac{I}{I_0}) \quad ó \quad \frac{I}{I_0} = 10^4$$

así $I = 10,000\, I_0$, lo cual significa que el temblor que se está midiendo es 10,000 veces mayor (más intenso) que el temblor estándar usado para comparar:

   - El terremoto de México de 1985 tuvo una magnitud de 8.3 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces fue más intenso que un temblor estándar?
   - El temblor de 1978 en Irán tuvo una intensidad de $10^{7.7}\, I_0$. ¿Cuál fue su magnitud en la escala Richter?

4. (Ecología) Como resultado de un accidente, la cantidad de gas Kriptón que una planta nuclear ha estado descargando en la atmósfera (en miles de pies cúbicos) está dada por

$$A(t) = 3(0.98)^t \qquad \text{con} \qquad 0 \leq t \leq 30$$

en donde t es el número de semanas transcurridas desde el accidente. ¿En cuántas semanas habrá en la atmósfera 2222.45 pies cúbicos de gas Kriptón? Graficar $A(t)$

5. (Absorción de la luz) Cuando un rayo de luz de intensidad I_0 (medida en lumens) atraviesa un medio de espesor s (medido en centímetros), la intensidad luminosa I del rayo emergente está dada por

$$I = I_0 e^{-ks}$$

donde k es una constante que depende del medio. Condidérese un medio tal que k=3

- Graficar la función intensidad $I(s)$.
- Encontrar la intensidad resultante de un rayo de luz de 80-lúmenes pasando a través de un medio de espesor 4.2 cm.
- Supóngase que un rayo luminoso penetra en un medio para el cual k=5 con una intensidad de 100 lúmenes. ¿A qué profundidad tendrá el rayo de luz una intensidad de 0.25 lúmenes?

6. (Temperatura) Durante 1980 se encontró que la temperatura (medida en grados Fahrenheit) de un cierto resorte está dada por

$$F(t) = 60 + sen(\frac{\pi}{4}t)$$

en donde t es el número de meses que han pasado desde el primero de enero de 1980.

- ¿A qué temperatura (en grados centígrados) se encontrará el resorte a mediados de noviembre de 1981?
- ¿En qué fecha el resorte se encontrará a 60.72 grados Fahrenheit?

A. Definición de la integral mediante Sumas de Riemann.

1. *Utilizando Sumas de Riemann, demostrarque el área bajo la gráfica de* $f(x) = x$, *en el intervalo* $[a,b]$ *es igual a* $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.
2. *Mediante una Suma de Riemann para* $n=10$, *calcular el área bajo la parábola* $y = -x^2 + 4$ *y encima del intervalo* $[-2,2]$.
3. *Obtener* $\int_a^b (-x^2 + 4)dx$, *utilizando sumas de Riemann.*
4. *Obtener un valor aproximado para* $\ln 2$, *utilizando una Suma de Riemann para* $n = 20$. *Sugerencia: Recordar que, de acuerdo a la definición de* $\ln x$, *se tiene* $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$
5. *Calcular aproximadamente el valor de* $\mathrm{ArcSen}(\frac{1}{2})$ *mediante una Suma de Riemann para* $n=10$. *Sugerencia:* $\mathrm{ArcSen}\,t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$
6. *Calcular aproximadamente el valor de* π, *utilizando una suma de Riemann para la función* $\frac{1}{1+x^2}$ *y* $n=20$. *Sugerencia:* $\frac{\pi}{4} = \mathrm{ArcTan}\,x\Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

B. El Teorema Fundamental del Cálculo.

1. *Dar un ejemplo de una función* $f(x)$ *continua en* $(0,1)$, *para la cual* $\int_0^1 f(x)\,dx$ *no exista. ¿ Porqué esto no contradice al Teorema Fundamental del Cálculo?*
2. *Dar un ejemplo de una función* $f(x)$ *que no sea continua en* $[0,1]$ *y para la cual* $\int_0^1 f(x)\,dx$ *sí exista.*
3. *Derivar la función* $G(t) = 3(6t+8)^{\frac{3}{2}} \cdot \int_0^t (\mathrm{ArcTan}\,x)^2 dx + 2t$ *y obtener* $G'(0)$.

4. *Derivar las siguientes funciones*

a) $F(t) = \displaystyle\int_5^{t^2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$; b) $G(t) \displaystyle\int_{t^4}^{t^2} \text{ArcTan}(e^x)\, dx$

5. *Verificar si la función* $y(x) = e^{-x^2}\cdot\displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt + ce^{-x^2}$ *satisface la ecuación* $y' + 2xy = 1$

6. *Si* $f(x) = \displaystyle\int_2^x \sqrt{9+t^2}\, dt$, *obtener* $(f^{-1})'(0)$

7. *Encontrar los máximos y mínimos para la función* $F(x) = \displaystyle\int_0^x \text{sen}(t^2)\, dt$ *en el intervalo* $[0,\pi^2]$

8. *Verificar si* $y(u) = e^u$, *en donde* $u = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}$, *satisface la ecuación* $y' - e^{-x^2} y = 0$, *y la condición* $y(0) = 1$

9. *Encontrar la función* $f(t)$ *y el valor de c, de tal forma que se satisfaga para todo* $x \in \mathbb{R}$ *la igualdad* $\displaystyle\int_c^x f(t)\, dt = \text{sen}x - \cos x$

C. Métodos de Integración.

1. *Resolver las siguientes integrales inmediatas:*

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-3x} dx$

b) $\displaystyle\int \frac{(\text{ArcTan}x)^5}{1+x^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-x}}}$

d) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1-z}{\sqrt{1-z^2}}\, dz$

h) $\displaystyle\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

i) $\displaystyle\int \frac{4^{\ln(\frac{1}{x})}}{x} dx$

j) $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2(\ln x)}{x}\, dx$

k) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\, dx$

o) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}2z\; dz}{1+\cos^2 z}$

p) $\displaystyle\int 2^x e^x dx$

q) $\displaystyle\int \frac{d\theta}{\theta\sqrt{9\theta^2-25}}$

r) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(\ln x)^r}$, $r \in \mathbb{Q}$

l) $\displaystyle\int \sec^2 x \, e^{4\tan x} dx$

s) $\displaystyle\int \frac{\text{sen}2x}{1 + \text{sen}^4 x} dx$

f) $\displaystyle\int \sqrt{4 + \cos 2\alpha} \; \text{sen}2\alpha \, d\alpha$

m) $\displaystyle\int \sec^2 x \tan^5 x \, dx$

t) $\displaystyle\int \left(\frac{\text{ArcSen}x}{1 - x^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$

n) $\displaystyle\int x\ln(x^2 + 1) \, dx$

u) $\displaystyle\int \frac{\ln x^r}{x} dx$, $r \in \mathbb{Q}$

2. *Resolver las siguientes integrales no-inmediatas:*

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{1 + x\sqrt{x}} \, dx$

g) $\displaystyle\int x^2 \ln^2 x \, dx$

m) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x + 1} dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 z^2\sqrt{5 - 2z} \, dz$

h) $\displaystyle\int_0^\pi |\text{sen}\theta - \cos\theta| \, d\theta$

n) $\displaystyle\int \csc x \, dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 x\sqrt{1 - x^2} \, dx$

i) $\displaystyle\int e^{3x}(\text{sen}2x - \cos 2x) \, dx$

o) $\displaystyle\int \csc^3 x \, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3} dx$

j) $\displaystyle\int x\ln x \, dx$

p) $\displaystyle\int x\text{ArcSen}x \, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{3 - x}} dx$

k) $\displaystyle\int \ln^2 x \, dx$

q) $\displaystyle\int \frac{e^{\text{ArcTan}x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

f) $\displaystyle\int x\,\text{sen}x \, dx$

l) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

r) $\displaystyle\int \frac{\text{ArcTan}x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

3. Resolver las siguientes integrales:

a) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$ *g)* $\int \operatorname{ArcTan}\sqrt{x}\, dx$ *m)* $\int \frac{\operatorname{ArcSen} x}{x^2}\, dx$

b) $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x^2}\, dx$ *h)* $\int x \operatorname{ArcCot} x\, dx$ *n)* $\int \cos^2(\ln x)\, dx$

c) $\int \ln(1 + x^2)\, dx$ *i)* $\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\, dx$ *o)* $\int \frac{\cot x}{\ln(\operatorname{sen} x)}\, dx$

d) $\int \sqrt{x}\, e^{-\sqrt{x}}\, dx$ *j)* $\int \operatorname{ArcSen}\sqrt{x}\, dx$ *p)* $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$

e) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$ *k)* $\int \ln x \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$ *q)* $\int \frac{dx}{4x^2 + 12x + 20}$

f) $\int \operatorname{sen} x \cos x \ln(\operatorname{sen} x)$ *l)* $\int x \operatorname{ArcTan} x\, dx$ *r)* $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2})\, dx$

4. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{4x^2 - 9}}$ *h)* $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x\, dx$ *o)* $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x\, dx$

b) $\int \frac{\sqrt{10 - x^2}}{x^4}\, dx$ *i)* $\int \sec^6 x \sqrt{\tan x}\, dx$ *p)* $\int \sec^3 x \tan x\, dx$

c) $\int \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}\, dx$ *j)* $\int \tan^{\frac{3}{2}} x \sec^4 x\, dx$ *q)* $\int \operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} 3x\, dx$

d) $\int \frac{x^2}{\sqrt{2x - x^2}}\, dx$ *k)* $\int \tan x \sqrt{\sec x}\, dx$ *r)* $\int \cos x \cos 4x\, dx$

e) $\int x^3 \sqrt{7 + x^2}\, dx$ *l)* $\int \cot^3 x \csc^3 x\, dx$ *s)* $\int \operatorname{sen} 4z \cos 5z\, dz$

f) $\int \frac{(16 - 9x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^6}\, dx$ *m)* $\int \operatorname{sen}^3 x\, (\cos x)^{\frac{5}{2}} dx$ *t)* $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx, m \neq n$

5. *Calcular las siguientes integrales de funciones racionales, conocien en caso dado una raíz del denominador:*

a) $\int \frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}\,dx$

b) $\int \frac{2x^3+3x^2+8x-7}{x^3+3x-4}\,dx$, *raíz* $x=1$

c) $\int \frac{4x^3-x+1}{x^3-1}\,dx$, *raíz* $x=1$

d) $\int \frac{3x^3+9x^2+10x+6}{x^3+2x^2+2x+1}\,dx$, *raíz* $x=-1$

e) $\int \frac{-x^3+3x^2+4x+14}{x^3-2x^2-2x-3}\,dx$, *raíz* $x=3$

f) $\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx$

g) $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$

6). *Resolver las siguientes integrales mediante las sustituciones* $y = e$ $y = \tan\frac{x}{2}$:

a) $\int \frac{2e^x+e^{-x}}{3e^x+e^{-x}}\,dx$

b) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3}\,dx$

c) $\int \frac{2e^x+2e^{-x}}{e^{-x}+3e^x}\,dx$

d) $\int \frac{2\,\mathrm{senx}+3\cos x}{3\,\mathrm{senx}+5\cos x}\,dx$

e) $\int \frac{2-5\tan x}{3+4\tan x}\,dx$

f) $\int \frac{1}{3+3\sec x}\,dx$

ALGUNAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL

LONGITUD DE UNA CURVA

1. Calcular la longitud de las curvas siguientes, entre los puntos señalados:

   a) $y = e^x$, entre $x = 0$ y $x = 1$

   b) $y = x^{\frac{3}{2}}$, entre $x = 1$ y $x = 3$

   c) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, entre $x = -1$ y $x = 1$

   d) Una circunferencia de radio r.

   e) $y = \ln(\cos x)$, entre $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$

   f) $y = \ln x$, entre $x = \sqrt{3}$ y $x = \sqrt{8}$

   g) La parábola $x^2 = 4y$, desde su vértice hasta un extremo de su lado recto.

   h) $y = arcsen\,(e^{-x})$, entre $x = 0$ y $x = 1$

ÁREAS

1. Calcular el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

2. Calcular el área encerrada por las curvas $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2$

3. Obtener el área de la región comprendida por $y = -x^2 + 4x - 3$ y sus rectas tangentes en los puntos $(0, -3)$, $(4, -3)$

4. Calcular el área de la región encerrada por la parábola $y^2 = 4x$ y su cuerda que pasa por los puntos $(1, -2)$, $(4, 4)$

5. Determinar el valor del área de la región comprendida por $x = 3 - y^2$ y su normal en el punto $(2, 1)$

6. Calcular el área de la región comprendida entre las curvas $x = y^2 - 2y - 2$ y $x = -2y^2 + y + 4$

7. Determinar el valor del área de la región limiada por las curvas $y = sen\, x$, $y = \cos x$, el eje Y y el primer punto en donde se intersectan estas curvas, para $x > 0$.

8. Calcular el área de la región comprendida por la gráfica de $y = \ln x$ y las rectas $x = \frac{1}{2}$, $x = 6$

9. Obtener el valor del área limitada por la gráfica de $y = x \ln x$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$

10. Calcular el área de la región comprendida por la curva $y = arcsen\, x$ y las rectas $y = 0$, $x = \sqrt{12}$

VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

1. Calcular el volumen de una esfera de radio R.

2. Demostrar que el volumen de un cilindro recto de radio R y altura H es $\pi R^2 H$

3. Obtener el volumen del paraboloide $x^2 + y^2 = z$ acotado por el plano $z = 10$

4. Obtener el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región comprendida por las gráficas de $y = 4x^2$ y $y = 2x$, alrededor de:

   a) El eje X
   b) El eje Y
   c) La recta $y = 2$
   d) La recta $x = 2$

5. Calcular el volumen del sólido de revolución generado por la región comprendida por las curvas $y = 6 - x^2$ y $y = 2$, al rotarse alrededor de:

   a) El eje X
   b) El eje Y

6. Obtener el volumen del sólido que se genera al rotar alrededor del eje X, la región comprendida por $y = \sqrt{sen\, x}$, $x = 0$, $x = \pi$

7. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región encerrada por $(x - 2)^2 + y^2 = 1$, alrededor de :

   a) El eje X
   b) El eje Y
   c) La recta $y = -2$
   d) La recta $x = 2$

8. Calcular el volumen de los sólidos de revolución que generan las curvas siguientes, alrededor de las rectas dadas:

a) $y = sen(x^2)$, $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,y el eje X; alrededor del eje Y

b) $y = \ln x$, $x = e$, $y = 0$; alrededor de la recta $x = \pi$

c) $y = arctan\, x$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$; alrededor del eje Y

d) $y = arcsen\, x$, $x = 0$, $x = 1$,y el eje X; alrededor del eje Y

e) $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$,y el eje X; alrededor de la racta $x = 2$

f) La parábola $y^2 = 8x$ y su lado recto; alrededor del eje Y

INTEGRACIÓN IMPROPIA

1. Calcular las siguientes integrales impropias:

   a) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^{\frac{4}{3}}}\, dx$

   b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

   c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{arctan\, x}}{1+x^2}\, dx$

   d) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-x}}}\, dx$

   e) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

   f) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2-2x+1}$

   g) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

   h) $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\, dx$

   i) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

   j) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}}\, dx$

   k) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}\, dx$

   l) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}\, dx$

   m) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\, dx$

   n) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(4-x)^2}\, dx$

   ñ) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$

2. Demostrar que el área bajo la gráfica de $f(x) = e^{-2x}$, para $x \geq 0$, es igual a $\frac{1}{2}$. Calcular el volumen generado por esta región al girar alrededor del eje X.

3. ¿Para qué valor de c la siguiente integral es convergente :$\int_2^{+\infty} \frac{cx}{x^2+1}\, dx$,?

EL TEOREMA DE TAYLOR

1. Utilizar los 5 primeros términos del desarrollo de Taylor de e^{-x} para calcular $e^{-0.2}$ y dar una estimación para el error correspondiente.

2. Obtener el valor aproximado de $\sqrt{9.1}$ mediante un polinomio de grado 5 y estimar el error cometido en tal aproximación.

3. En cada uno de los siguientes incisos calcular el valor aproximado de la expresión dada, utilizando un polinomio del grado que se indica y obtener la estimación del error correspondiente:

   a) $\frac{1}{\sqrt{4.2}}$; $n = 4$
   b) $\ln(1.3)$; $n = 5$
   c) $\sqrt[3]{8.5}$; $n = 4$
   d) $sen(31^{\circ})$; $n = 4$
   e) $e^{\frac{1}{8}}$; $n = 5$

EVALUACIONES APLICADAS

PRIMER EXAMEN DE CÁLCULO II

Trimestre 92 – O

(3.0) **1**. Derive las funciones:

$$f(x) = \mathbf{sen}^2(7 + \mathbf{ln}\, x), \qquad g(x) = 5^{2x}\,\mathbf{ArcCos}\, 5x$$

(1.5) **2**. Encuentre los valores de x que satisfagan la ecuación:

$$\log_4 4^3 + \log_4 (x^2 + 12) = 4 + \log_4 (6 - x)$$

(3.5) **3**. Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$:

a) ¿Para qué valores de x está definida $f(x)$?

b) ¿Cuál es el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$?

c) ¿Tiene asíntotas verticales?

d) Verifique: $f'(x) = \frac{(x-3)e^x}{x^4}$ y $f''(x) = \frac{(x^2-6x+12)e^x}{x^5}$

e) Determine la región en donde $f(x)$ crece (decrece)

f) ¿En qué punto del dominio alcanza $f(x)$ su valor máximo (mínimo)? ¿Cuál es el valor de este máximo (mínimo)? Si es necesario, utilice el valor $e^3 = 20.349$

g) ¿En dónde es cóncava hacia abajo (arriba) la gráfica de $f(x)$?

h) ¿En qué punto(s) cambia la concavidad de $f(x)$?

i) Resuma la información anterior en un bosquejo gráfico.

(2.0) **4**. Dada la función $f(x) = 1 + \sqrt{x} - \mathbf{ln}\, x$, determine un intervalo en donde f tenga inversa. Obtenga $(f^{-1})'(2)$, sabiendo que $f(1) = 2$

PRIMER EXAMEN DE CÁLCULO II

Trimestre 92 – P

1. Derivar la función $f(x) = \mathrm{e}^{\mathbf{ArcTan}\, x} - x(\mathbf{Cos}(\mathbf{ln}\, 2x))^2$
2. Encontrar los valores de x que satisfagan la ecuación $(\frac{3}{7})^{3x-7} = (\frac{7}{3})^{7x-3}$
3. Graficar la función $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$, tomando en cuenta su dominio, discontinuidades, asíntotas, máximos y mínimos, intervalos de monotonía, puntos de inflexión e intervalos de concavidad.
4. Dada la función $f(x) = \frac{x}{\mathbf{ln}\, x}$
   a) Determinar el (los) intervalo(s) en donde exista la función inversa.
   b) Sabiendo que $f(\mathrm{e}^2) = \frac{\mathrm{e}}{2}$, obtener $(f^{-1})'(\frac{\mathrm{e}}{2})$

SEGUNDO EXAMEN DE CÁLCULO II

Trimestre 92-O

Noviembre 17 de 1992

(3.0) 1. Resolver la integral:

$$\int \frac{\textbf{ArcSec}\, x}{x(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

(2.5) 2. Calcular:

$$\int \frac{\ln x^8}{\sqrt{3x}}\, dx$$

(2.5) 3. Obtener el valor aproximado de la siguiente integral, utilizando una Suma de Riemann para $f(x) = \text{sen}\sqrt{x}$, el intervalo [0,1] y $n = 5$:

$$\int_0^1 \text{sen}\,\sqrt{x}\, dx$$

(Asegúrese de que su calculadora está en modo *radianes*)

(2.0) 4. Un depósito perforado de combustible pierde su contenido de tal modo que la variación de su volumen con respecto al tiempo está dada por

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = 4\pi(1+t)^2$$

Obtener una expresión para el volumen del depósito al tiempo t.(No olvidar la constante de integración) Si $\mathbf{V}(0) = 100$, ¿Cuál es el valor de la constante?

TERCER EXAMEN DE CÁLCULO II

Trimestre 92-O

Noviembre 20 de 1992

(4.0) 1. Resolver la integral:

$$\int \frac{2x^3 + x^2 + 9x - 16}{x^3 - x^2 + 3x - 10}\, dx,$$

sabiendo que $x = 2$ es una raíz del denominador.

(3.0) 2. Obtener:

$$\int \frac{x^2}{(1 - x^2)^{\frac{5}{2}}}\, dx$$

(3.0) 3. Calcular:

$$\int \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x \, dx$$

Tercer examen de Cálculo II

Trimestre 91-P

Julio 16, 1992

(25%) 1. Calcular el área encerrada por las curvas

$$x - 3 = -y^2 \text{ y } x - 4 = -2y^2$$

(30%) 2. Obtener el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región determinada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x = \pi$, $x = 2\pi$ y el eje X, al rotarse alrededor de la recta $y = 1$

(30%) 3. Calcular $\sqrt{1.4}$, en forma aproximada utilizando un polinomio de Taylor de grado 4 y obtener una estimación para el error correspondiente.

(15%) 4. Obtener $\int_{-1}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

Trimestre 91-O

EXAMEN GLOBAL DE CÁLCULO II

TEMA I

(*)1. Derivar $f(x) = \operatorname{sen}^2(e^{x^2} + \operatorname{ArcTan} 2x) + \ln^2(1+2x^2)$

(*)2. Despejar x de la siguiente ecuación:

$$\ln\left[a^2 + \operatorname{ArcTan}\left(\frac{x^3}{a}\right)\right] - 2b + 3 = 0$$

3. Sea $f(x) = x + e^{-x}$

a) Determine los intervalos en donde existe la función inversa.

b) Considerando que $f(1) = 1 + \frac{1}{e}$, obtenga $(f^{-1})'(1 + \frac{1}{e})$

4. Obtenga el valor de x que satisfaga la ecuación

$$\log_2(3x - 2) = \log_{1/2}(x)$$

(*)5. Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ (Obtenga periodicidad, paridad, máximos, mínimos, etc.)

TEMA II

(*)6. Verifique si la función $y(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + ce^{-x^2}$, satisface la ecuación $y' + 2xy = 1$

7. Calcule las siguientes integrales

(*) a) $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^3+1}\,dx$

(*) b) $\displaystyle\int \frac{x\, e^{\operatorname{ArcTan} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+1)^{3/2}}$

TEMA III.

8. Calcule la siguiente integral impropia: $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}$

(*)9 Calcule el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar la región limitada por $y = \operatorname{sen} x^2$ y las rectas $y=0$ y $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ alrededor de la recta $x=0$

10. Calcule el área de la región limitada por $x = y^2 + 2y - 2$ y la recta que pasa por el punto (1,1), y cuya pendiente es $-\frac{1}{2}$ de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (1,1).

(*)11. a) Calcule el valor aproximado de $\frac{1}{\sqrt{4.2}}$ con un polinomio de Taylor de cuarto grado.

b) Estime el error en la aproximación anterior.

12. Obtenga $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{x}}{\cot \frac{\pi}{2} x}$

EXAMEN GLOBAL DE CÁLCULO II

Trimestre 91-P

Julio 24 de 1992

IMPORTANTE
1.*Los problemas marcados con * son los que componen el examen global.*
2.*Para aprobar el examen global son indispensables los siguientes requisitos:*
a)*Resolver correctamente los ejercicios* 1, 5, 6 y 11.
b)*Obtener, por lo menos, una calificación de* 6.0
PARTE I

(0.8) *1. Obtener la derivada de $\mathbf{f}(x) = \mathbf{ArcSen}\sqrt{x} - \mathbf{e}^{\cos^2 3x}$

(1.3) *2. Graficar la función $\mathbf{f}(x) = x(\ln x)^2$, obteniendo dominio, máximos, mínimos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y de crecimiento. Justificar las respuestas.

(0.9) *3. Dada la función $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + 1$, determinar el(los) intervalo(s) en donde exista la función inversa de $\mathbf{f}(x)$, y sabiendo que $\mathbf{f}(\mathbf{e}) = \frac{1}{2}$, obtener $(\mathbf{f}')^{-1}(\frac{1}{2})$

4. Obtener el valor de x que satisfaga la ecuación:

$$\log_2(4-x) + \log_2(1-2x) = 2\log_2 3$$

PARTE II

(1.3) *5. Resolver la integral:

$$\int \frac{\mathbf{ArcSen}\,\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

(1.3) *6. Calcular:

$$\int \frac{3x^2+x-1}{x^3-1}\,dx$$

(0.9) *7. Obtener la integral siguiente:

$$\int \frac{\mathbf{sen}^4 x}{\cos^2 x}\,dx$$

8. Derivar la función $\mathbf{F}(x) = \mathbf{sen}\, x \cdot \int_1^{\mathbf{sen}\, x} e^{1-t^2}\, dt$

PARTE III

(1.3) *9. Calcular $\frac{1}{\sqrt[3]{1.4}}$, en forma aproximada utilizando un polinomio de Taylor de grado 4 y obtener una estimación para el error correspondiente.

(1.1) *10. Calcular el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar alrededor de la recta $y = -1$ la región encerrada por las curvas $y = -\frac{3}{4}x^2 + 6$ y $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$

(1.1) *11. Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $y = \cos x$ y $y = 3\cos x$ en el intervalo $[-\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$

12. Obtener el valor de la siguiente integral:

$$\int_0^1 x \ln x \, dx$$

EXAMEN GLOBAL DE CÁLCULO II

TRIMESTRE 92-I

PARTE I

Valor

(1) (*)1. *Obtener la derivada de* $f(x) = \tan^2(\sqrt{x}) + \sqrt{\text{ArcSen}x}.\ln x^2$

($\frac{3}{2}$) (*)2. *Graficar la función* $f(x) = xe^{-2x}$ *obteniendo dominio, asíntotas, máximos, mínimos, puntos de inflexión e intervalos de concavidad y de crecimiento.*

(1) (*)3. *Despejar el valor de* x *de la ecuación* $e^{2-\text{sen}3x} - 5 = y$

4. *Determinar el valor de* x *que satisfaga la siguiente ecuación:*
$3^x - 3^{x+1} = 5^x - 5^{x+1}$

5. *Dada la función* $f(x) = \ln(x-1) + 2x$
   a) *Determinar el intervalo en donde exista la inversa.*
   b) *Sabiendo que* $f(2) = 4$, *obtener* $(f^{-1})'(4)$

PARTE II

Valor

(1) (*)1. *Dada la función* $F(x) = x^2.\int_1^{\sqrt{x}} (31 + t^2)^{1/5}\, dt$, *obtener* $F'(x)$ y $F'(1)$

($\frac{5}{4}$) (*)2. *Sabiendo que* $x = -4$ es una raíz *del denominador del integrando,*
obtener $\int \frac{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 49x + 22}{x^3 + 2x^2 + 2x + 40}\, dx$

($\frac{3}{4}$) (*)3. *Calcular* $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 1} + 1}\, dx$

($\frac{3}{4}$) (*)4. *Obtener* $\int x^{3/2}.\ln(\frac{1}{x})\, dx$

5. *Resolver la integral* $\int \frac{(1 - x^2)^{3/2}}{x^2}\, dx$

PARTE III

Valor

($\frac{3}{2}$) (*)1. *Calcular el valor de* $\cos(186^\circ)$ *utilizando un polinomio de Taylor de grado 4 y obtener una estimación del error.*

($\frac{5}{4}$) (*)2. *Calcular el volumen del sólido de revolución que genera al rotar alrededor de la recta* $y=-2$ *la región limitada por la gráfica de* $y=\text{sen}x$, *el eje* Y, *la recta* $y=2$ *y la recta* $x=\pi$

3. *Calcular el área de la región encerrada por las curvas:*
$(y-3)^2 = 9(x+1)$ *y* $(y-3)^2 = -3(x-3)$

EXAMEN GLOBAL DE CÁLCULO II

Trimestre 92-O. Diciembre 14 de 1992.

IMPORTANTE

- **Los problemas marcados con ♠ son los que componen el examen global.**
- **Para aprobar el examen global es indispensable resolver correctamente los ejercicios 1, 5, 6, 12 y obtener, por lo menos, calificación 6.0**

PARTE I

(0.7) ♠*1. Deriva la función* $\mathbf{f}(x) = \sqrt{(\ln x)^2 + \mathbf{ArcSen}\, x}$

(1.3) ♠*2. Dada la función* $\mathbf{f}(x) = 1 + (1+x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{8}}$

a) ¿Para qué valores de x está definida $\mathbf{f}(x)$?

b) ¿Cuál es el comportamiento de $\mathbf{f}(x)$ cuando $x \to \pm\infty$?

c) Verifica: $\mathbf{f}'(x) = \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{x}{8}}(7-x)$ *y* $\mathbf{f}''(x) = -\frac{1}{64}\mathrm{e}^{-\frac{x}{8}}(15-x)$

d) Determina la región en donde $\mathbf{f}(x)$ crece o decrece.

e) ¿Tiene máximos o mínimos? Determínalos.

f) ¿En dónde es la gráfica de $\mathbf{f}(x)$ cóncava hacia abajo o hacia arriba y en dónde cambia su concavidad?

g) Resume la información anterior en un bosquejo gráfico. Justifica todas tus respuestas.

(0.9) ♠*3. Dada la función* $\mathbf{f}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{4-\mathrm{e}^{x}}$*, determina algún intervalo en donde exista la función inversa de $\mathbf{f}(x)$. Sabiendo que $\mathbf{f}(0) = \frac{1}{3}$, calcula* $(\mathbf{f}')^{-1}(\frac{1}{3})$

4. Determina los valores de x que satisfagan la ecuación $x^{\ln x} = \mathrm{e}$

PARTE II

(1.2) ♠*5. Resuelve la integral:*

$$\int \ln(4 + \sqrt{x})\, dx$$

(1.3) ♠6. *Sabiendo que $x = 1$ es una raíz de denominador, calcula*

$$\int \frac{2x^3 + 8x^2 + 10x - 9}{x^3 + 3x^2 + 2x - 6}\, dx$$

(1.1) ♠7. *Resuelve*

$$\int_{-\ln 2}^{0} \sqrt{e^{-x} - 1}\, dx$$

8. *Dadas las funciones*

$$\mathbf{F}(x) = \int_1^{2x} \frac{\cos t}{t}\, dt, \qquad \mathbf{G}(x) = \int_1^{x} \frac{\cos^2 t}{t}\, dt$$

determina cuál de los números $\mathbf{F}'(\frac{\pi}{2})$ *y* $\mathbf{G}'(\pi)$ *es el mayor.*

9. *Encuentra*

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$$

PARTE III

(1.3) ♠10. *Calcula* $\sqrt{50}$ *en forma aproximada utilizando un polinomio de Taylor de grado 4 y determina una estimación para el error correspondiente.*

(1.1) ♠11. *Calcula el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar alrededor del eje X, la región encerrada por las curvas* $y = e^x$, $y = e^{-x+2}$, *el eje Y, el eje X y la recta* $x = 2$

(1.1) ♠12. *Verifica que el área encerrada por la elipse* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ *es igual a* 6π

13. *Calcula el valor de la siguiente integral:*

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$$

MISCELÁNEA DE PROBLEMAS DE APLICACIÓN DEL CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

* Graficar x^3 y $x^{1/3}$, $27x^3$ y $\frac{1}{8}x^{+1/3}$ $x \geq 0$

* Para oscilaciones de pequeña amplitud, la relación entre el periodo y la longitud de un péndulo puede ser aproximado por la ecuación.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad g = 980 \text{ cm/seg}^2$$

Cuando la temperatura θ cambia, la longitud L aumenta o disminuye a una razón de $\frac{dL}{d\theta} = KL$, K constante.

¿Cuál es la razón de cambio del periodo con respecto a la temperatura?

* Un camión puede transportar 60 personas. Si el número x de personas por viaje está relacionado con el precio del boleto (P pesos) por la regla $P = [3 - (\frac{x}{40})]^2$, escriba la función que expresa los ingresos totales por viaje. ¿Cuál es el número de personas por viaje x_1 que hace que el ingreso marginal sea igual a cero? ¿Cuál es el correspondiente precio P_1?

* Cae arena a un contenedor cónico a razón de 10 dm^3/min. El radio de la base es igual a la mitad de su altura. ¿Qué tan rápido crece la altura de la pila cuando tiene una altura h?

* Suponga que una gota es una esfera perfecta. Suponga que por condensación la gota acumula "mezcla" a una razón proporcional a su área. Demuestre que su radio crece a una razón constante.

* Cuando el aire cambia de volumen sin que se aumente el calor, se cumple que $PV^{1.4}$= constante ¿Qué tan rápido cambia la presión si el volumen está decreciendo a una velocidad de sdm^3/min?

* Un catalizador de una reacción química es una substancia que controla la razón de cambio de la reacción sin que tenga ningún cambio permanente; una reacción autocatalítica es una reacción cuyo producto es un catalizador para su propia formación. En algunos casos es razonable suponer que la razón v de la reacción es proporcional a la cantidad de la substancia original y a la cantidad del producto, esto es

$v = kx(a-x)$

x = cantidad del producto

a = cantidad de substancia original, k=constante mayor que o

¿Para qué valor de c, v es un máximo?

* Un alambre de longitud L se va a cortar en dos pedazos de modo que una porción se convierta en círculo y la otra en cuadrado. Si se desea que el área total sea máxima, ¿cómo se debería cortar el alambre?

* Una compañía manufacturera puede vender x objetos por semana a un precio $P = 200 - 0.01x$ pesos y le cuesta $y=50x+20{,}000$ pesos producir x objetos ¿cuál es el número x que genera máximas utilidades?

* La dureza de una viga rectangular es proporcional al producto de su ancho por el de su profundidad. Encuentre las dimensiones de viga más fuerte que se pueden cortar de un cilindro circular de radio r.

* La iluminación en cualquier punto es proporcional al producto de la intensidad de la fuente y del inverso del cuadrado de la distancia. Si dos fuentes de intensidad relativa a y b están a una distancia C, ¿en qué punto de la linea que los une será la luminosidad un mínimo? Suponga que la luminosidad es la suma de la luminosidad debida a cada fuente.

* Cuando tosemos, la tráquea se contrae de modo que aumenta la velocidad del aire que sale. ¿Cuál es la contracción que maximiza la velocidad?, ¿en realidad se contrae esa cantidad? Suponiendo cierta elasticidad de la pared traqueal y cierta desaceleración del flujo del aire cercano a la pared debida a la fricción, la velocidad puede ser modelada por la ecuación

$$V = C\,(r - r_o)\,r^2 \,\frac{cm}{seg}, \quad \frac{r_o}{2} \leq r \leq r_o \qquad \text{con } r_o$$

el radio en reposo de la tráquea. Demuestre que el máximo para V se encuentra en $r = \frac{2}{3}\,r_o$. Estudios realizados con rayos x confirman que la tráquea se contrae hasta alcanzar este radio.

* Grafique la función que representa la velocidad lineal de un taxista durante el día laboral.

  Grafique la función que representa la distancia recorrida correspondiente.

* Si suponemos que la velocidad está relacionada con la cantidad de gases despedidos por un motor y que la velocidad 0, es decir el motor encendido sin movimiento, es la más contaminante, determine la cantidad total producida por el taxista. Para esto proponga una función que relacione la contaminación con la velocidad.

* Si dos funciones de R en R tienen su mínimo en Xo, ¿quiere esto decir que el mínimo de la suma de las funciones también está en Xo? ¿Que el mínimo del producto de las funciones está en Xo?

* Graficar las siguientes funciones CosX + CosX, SenX + SenX, CosX + SenX. ¿Estas funciones son periódicas?

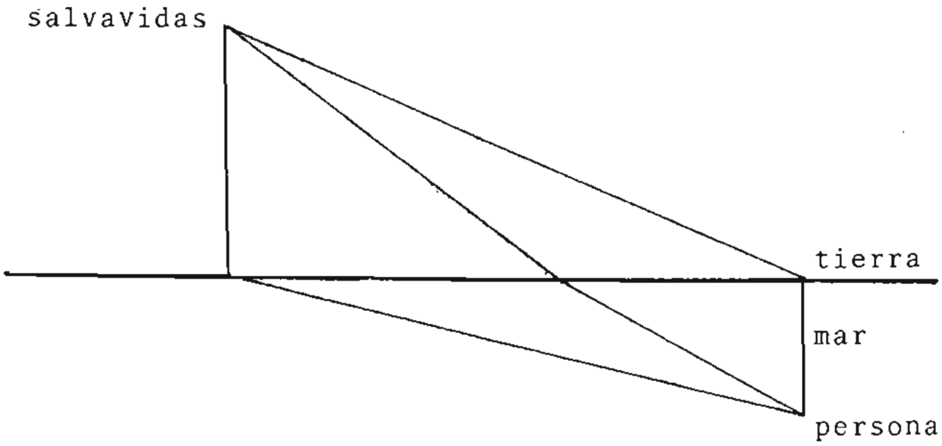
* ¿Cómo se obtiene el consumo de agua en una casa en un día sabiendo que la velocidad de caída máxima de agua en una regadera $1m^3$/hora; la llave del baño o cocina es 10 litros/hora máxima; la manguera 20 litros/hora máxima y que un excusado consume 15 litros en cada descarga?

* ¿Cuál es la cantidad total de uso de la televisión (las televisiones) en su casa en una semana? Haga una gráfica para cada televisión ?Cuál es el uso promedio de cada televisión?

* Grafique $\text{Sen}X$, $\text{Sen}2X$, $\text{Sen}\frac{1}{2}X$

* Grafique $\log_e X$, $\log_e X^{\frac{1}{2}}$, $\log_e 2X$, $2\log_e X$, $\log X^2$

* Un salvavidas detecta a una persona solicitando auxilio en el mar y busca el mejor camino para llegar a ella. El mejor camino será el que minimice el tiempo.



Las condiciones con que el salvavidas recorre la tierra a una velocidad $V_1 = 5 m/seg$ y en el mar tiene una velocidad $V_2 = 1.2 m/seg$.,¿Cuál es el mejor trayecto?

* Determinar la parábola de longitud mínima que pasa por [0,0] y por [1,1] de la forma $f(x)=ax^2 + bx + c$, a positiva.

* ¿Cuál es la longitud de las curvas $f(x)=x^n$ de [0,0] a [1,1]?

* Determinar los puntos de inflexión, mínimos y máximos de una función polinomial de grado 2 y de una función polinomial de grado 3.

* Una presa se llena durante la lluvia a una velocidad $f(v)=at$, con t el tiempo de duración de la lluvia.

  Tiene una capacidad total $Vo = 10^6 m^3$

  Por fuga y evaporación pierde $V_i e^{-bt} m^3$/por día con V_i el volumen del agua al inicio del día.

Suponga que llovió 3 días seguidos; usted desea saber la cantidad de agua cuatro días después de que cesó la lluvia y de que el volumen total inicial era de $V_i=\frac{1}{3}10^6m^3$. Haga las gráficas correspondientes. Suponga que la evaporación y las fugas se mantienen constantes incluso durante la lluvia.

* Una estructura metálica se corroe rápidamente en el ambiente salino cercano al mar; para evitarlo se acostumbra pintar la estructura con lo que la velocidad de corrosión disminuye. Si se quiere que la corrosión sea menor a 1/10 parte de la estructura en cualquier tiempo, ¿Cada cuándo se debe pintar? sabiendo que $f(\text{corrosión})=ax^2+b$, con $x(t)$ la proporción corroída y la pintura hace que la a cambie a a' con $a'=\frac{a}{5}$ durante un periodo de 2 meses y después, bruscamente, vuelve a ser a la constante para la fórmula. La parte corroída al final de cada periodo ya no se puede revertir.

* Una luz rotatoria en un faro a 3 millas de una playa recta ejecuta 8 revoluciones por minuto. Encuentre la velocidad del haz de luz a lo largo de la playa en el instante en que hace un ángulo de 45° con la línea de la playa.

* Si una partícula se mueve a lo largo del eje X de modo que su posición al tiempo t está dada por $X=ae^{wt}+be^{-wt}$ con a,b,w, constantes, demuestre que la partícula es repelida del origen con una fuerza proporcional a la distancia [Recuerde que F=ma].

* El artículo de la Enciclopedia Británica comienza con la afirmación:

"Al acortar los procesos de cómputo, los logaritmos han duplicado la velocidad de cómputo de astrónomos e ingenieros", ¿Qué propiedad o propiedades de los logaritmos piensa usted que el autor del artículo tenía en mente al hacer la afirmación?

* Un tanque cilíndrico con radio 3 metros y altura 6 metros, con su eje vertical, está lleno de agua pero tiene un agujero en el piso.

  Suponiendo que el agua escapa a una razón proporcional a la altura del agua en el tanque y que 10 por ciento escapa durante la primera hora, encuentre una fórmula para el volumen del agua que subsiste en el tanque después de t horas.

* Determine los puntos de inflexión de la curva $Y=e^{-x^2/a}$, con a una constante positiva. Grafique esta curva que es muy importante en estadística (relacionada con la Campana de Gauss o Distribución Normal)

* Al estudiar las condiciones meteorológicas de Alaska para la construcción del gaseoducto se encontró que la temperatura en °Farenheit promedio variaba durante el año en forma senoidal con muy buena aproximación usando la fórmula

  $$f(x)=37 \operatorname{sen}[\frac{2\pi}{365}(x-101)] = 25 \text{ con } x=0 \quad \text{el 1o. de enero}$$

  Grafique la curva, determine la temperatura máxima y mínima y en que días del año ocurren. (Tomado originalmente de "The Mathematics Teacher" Sept. 1977, B.M. Lando, C.A. Lando "Is the course of temperature variation a sine curse".) ¿Cuál es la temperatura promedio en el año?

* Si un recipiente semiesférico de radio 10cm se llena con agua hasta una profundidad de x cm, el volumen de agua está dado por $V=\pi[10-\frac{(x)}{3}]x^2$. Encuentre la razón de cambio del aumento del volumen por cada aumento de un cm de la profundidad.

* Si $X=3t+1$ y $Y=t^2+t$ encuentre $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dt}{dx}$ y $\frac{dy}{dx}$. Elimine t para obtener a Y como función de x y determine $\frac{dy}{dx}$ directamente. ¿Coincide el resultado con el método de la regla de la cadena?

* Suponga que cae agua a un tanque a una razón de $f(t)$ m^3/min, donde f está dado por una función de t, positiva y continua. Sea Q_0 la cantidad de agua en el tanque al tiempo $t=0$. Aplique el Teorema Fundamental del Cálculo para mostrar que la cantidad de agua en el tanque al tiempo $t=b$ es $Q=Q_0+\int_0^b f(t)dt$

* Un tipo de suela de zapatos se desgasta de acuerdo con la siguiente fórmula $D(t)=D_0-D_0e^{-at}$. ¿En cuánto tiempo el desgaste es de la mitad?, ¿del 8%?

* Se ha visto que un material químico se degrada de acuerdo con la fórmula $S=S_0-S_0e^{-bt}$. ¿Cuánto tiempo hay que esperar para que 90% del material se haya degradado?

* Haga una gráfica de la cantidad de carros del metro en funcionamiento en una línea como función de la hora del día y del día de la semana.

*¿Qué función sugiere para la velocidad de un convoy con respecto al tiempo?, grafíquela al igual que las correspondientes funciones de distancia y aceleración con respecto al tiempo.

* Un convoy de trenes transporta tres tipos de productos.

tipo 1 con una densidad de .5 kg/dm^3

tipo 2 con una densidad de 2.0 kg/dm^3

tipo 3 con una densidad de 10 kg/dm^3

Los precios correspondientes de transportación son C_1, $C_2=\frac{C_1}{2}$ y $C_3=\frac{C_2}{2}=\frac{C_1}{4}$ por kg

En total se puede enviar una tonelada por cada furgón del convoy. ¿Cuál es el precio máximo de transportación?

¿Cuál es el precio mínimo que se puede cobrar por un furgón?
¿Cuál es la función de peso total transportada?
¿Cuál es la función de costo general?

* El valor monetario de los bienes inmuebles de la ciudad de México varía de 5,000 a 10^9 nuevos pesos; la distribución del número de bienes inmuebles se puede representar por la función $f(x)=Ae^{-bx}$ si $N\$5000 \leq x \leq N\$10^9$

$$=0 \qquad \text{si} \qquad x<N\$5000$$

¿Cuál es aproximadamente el valor de todos los inmuebles de la ciudad de México? ¿Cuál es el valor promedio?

¿Si el impuesto predial cobrado por año está dado por la función

$$i(x) = 100 + \frac{x}{1000}; \quad 5000 \quad x \quad 10^9$$

¿Cuál será el impuesto total cobrado al año con esta tasa?

* La mayoría de los 120,000 libros de la biblioteca de la UAM-A tienen dimensiones que van de 10 a 100 cm de ancho y de 10 a 100cm de largo. La distribución de la longitud del ancho se supone que está dada por la función

$$f(x)=ae^{-b(x-20)^2}. \qquad \text{si} \qquad 10<x<30 \qquad \text{y}$$

$$f(x)=de^{-cx} \qquad \text{si} \qquad 30<x<100$$

Si existe un total de 120,000 libros, ¿Cuántos libros están entre 10 y 20cm de ancho?

Se ha visto que una página tiene entre 20 y 40 líneas y un libro entre 20 y 1000 páginas. Proponga funciones que correspondan a las distribuciones del número de líneas por página y del número de páginas.

¿Cuál será el total de páginas que existe en la biblioteca? ¿Cuál será el total de líneas que existe en la biblioteca?

Si cada línea tiene entre 40 y 80 letras (y blancos) con una distribución constante, ¿Cuántas letras hay en la biblioteca? Si a cada letra le asociamos 5 bits, ¿cuántos bits hay en promedio por libro? ¿Cuántos bits hay en total en la biblioteca?

* Un alumno 'aprende' el contenido de un curso con velocidad $v(t)=at^2+bt=c$, t tiempo de dedicación, $a<0$. ¿Cuánto material habrá aprendido después de 40 horas? Si olvida con una velocidad $V_o(t)=de^{-bt}$, ¿En cuánto tiempo habrá olvidado lo que aprendió en las cuarenta horas?

* Haga una gráfica que represente el peso de los objetos que contiene un edificio que usted conozca como función del tiempo; incluya ahora las entradas y salidas diarias de personas al edificio. Ahora sume las dos contribuciones y obtenga la gráfica correspondiente.

* Si el consumo de energía eléctrica bimestral de los bienes inmuebles de la ciudad de México sigue la función

$$f(x)=Ae^{-bx}+Ce^{-dx}, \quad 3kwh<x<10$$

¿Cuál es el consumo total de la ciudad de México si el total de inmuebles es de 10^5?

* En la ciudad de México hay $15x10^6$ habitantes.

Suponemos que $14.5x10^6$ camina (el resto son bebés, o están encamados o inmovilizados por problemas de salud). Un habitante de la ciudad camina entre 15 minutos y 15 horas diarias entre semana.

con $f(x)=a(x-b)^2$ con $\frac{1}{4}h<x<5hrs$

$f(x)=ce^{-m}(x-5h)$, $5h<x<15hrs$

¿Cuánto vale c en términos de a y b?

¿Cuánto tiempo en total dedica la población de la ciudad de México a caminar?

* Una persona sube al castillo de Chapultepec (3kms) desde la base del cerro con velocidad

$$v(t) = a\,t^2 + bt + c \qquad a<0 \qquad c>0$$

¿Cómo tiene que ser a comparado con c para que llegue al Castillo?
¿Cuánto vale el tiempo total de recorrido?

¿Qué aceleración tiene para diferentes tiempos?

¿Qué recorrido total lleva para diferentes tiempos?

* ¿Cuál es el volumen de un elipsoide con fórmula

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1?$$

Si la densidad de masa decrece a medida que $x \to |a|$ con la fórmula

$$g(x)=10-|x| \ \frac{g}{cm^3}$$ ¿Cuál es la masa total del elipsoide?

(a=10)

* La concentración en % de alcohol x obtenida en una destilación varía de .950 a .999 de cada litro, con una función $f(x)=ax^2+b$, $a<0$, $b>0$
¿Cuál es la concentración promedio?

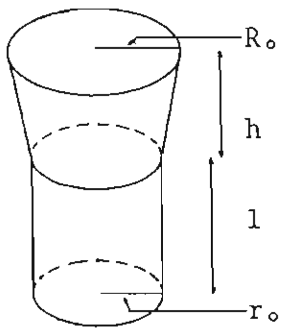
* Se sabe que la concentración de alcohol de 10^6 litros producidos varía de 0 hasta 100% de modo que satisfacen la función

$$f(x) = 20x^3(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$
$$= 0 \qquad\qquad 1 < x$$

¿Cuántos litros de alcohol del millón tiene una concentración entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$? ¿Cuál es la concentración promedio?

¿Cuál es la función $F(x_o) = \int_{-\infty}^{x_o} f(x)dx$? ¿Qué significa?

* ¿Cuál es la masa de un tornillo si suponemos que consta de un cono truncado de altura h, radio mayor R_o y radio menor r_o, un cilindro de altura l del que se ha eliminado lo equivalente a una capa cilíndrica de altura l_o y grueso j_o y el mismo radio r_o ? Suponemos una densidad de masa constante d.



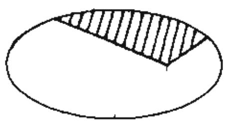
* ¿Para qué valor de x_o, $\int_1^{x_o} \ln dx = \int_0^3 e^{-x}dx$?

¿Qué significa geométricamente esta igualdad?

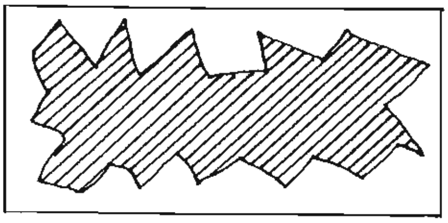
* ¿Qué masa total tienen los anillos de Saturno?

¿Qué masa total tienen los asteroides que giran en órbita alrededor del Sol?

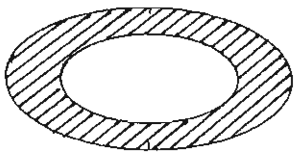
* Determine el área de un sector elíptico que parte de un foco de la elipse.



* ¿Cómo determinaría el área de la siguiente figura?



* ¿Cuánto pesa una cadena gruesa en que los eslabones tienen forma elipsoidal, tiene densidad uniforme y consta de cien eslabones?



* Se ha visto que al usar agua de la llave para lavarse, la proporción del agua que no se utiliza se desperdicia y crece a medida que crece el volumen de agua x que sale de la llave por segundo

$$Y=ax^2(t)+bx(t)$$

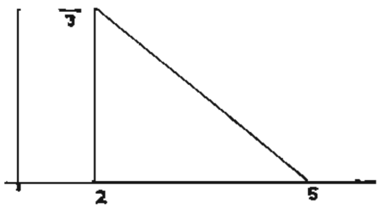
Si pasó un minuto y $\dot{X}(t) = \begin{cases} e^t-1 & 0<t<10 \text{ seg} \\ 4t & 10<t<60 \text{ seg} \end{cases}$

¿Cuál es la cantidad total de agua que salió de la llave?

¿Cuál es la cantidad total de agua que se desperdició?

* Un dirigible puede modelarse por un elipsoide lleno de aire caliente que es más ligero que el aire a temperatura ambiente. ¿Cuánto debe pesar el volumen de aire caliente si su densidad es a kg/m^3?

* Un ser humano consume, bebe, entre 2 y 5 litros diarios de agua. Si suponemos que es más común mientras menos consume, es decir que el consumo se distribuye así



¿Cuántos de los 15 millones de habitantes del D.F. consumen menos de 3 litros? ¿Cuántos, más de cuatro? ¿Cuál es el consumo promedio en el D.F.?

* ¿Cuánto debe valer K para que valga 1 el área total bajo la función?

$$f(x) = K \quad \text{en} \quad [a,b]$$

$$f(x) = 0 \quad \text{fuera}$$

Si $F(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$ evalúe y grafique $F(x_0) \forall x_0 \varepsilon R$

Si $a=3$ y $b=7$ ¿Cuánto vale $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$?

* Si $f(x) = e^{-x}$ $\quad x>0$ ¿Cuánto vale $F(x_0) \forall x_0 \varepsilon R$?

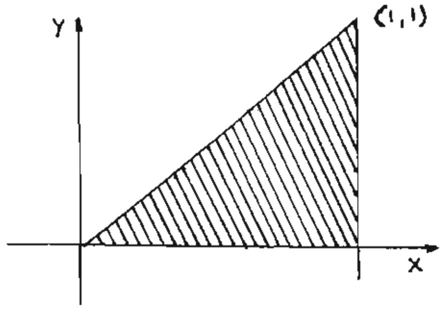
$\quad = 0$ $\quad x \leq 0$ ¿Cuánto vale la media = $\int_{\infty}^{\infty} xf(x)dx$?

Grafique $f(x)$ y $F(x_0) \forall x, x_0 \varepsilon R$

* Una elipse con centro en el origen tiene semieje mayor a (en el eje x) y semieje menor b (en el eje y).

Calcular el perímetro y el área de la elipse, verificar los resultados cuando la elipse se convierte en circunferencia.

Calcular el área del triángulo $0 \leq x \leq a$ $\qquad 0 \leq y \leq x$



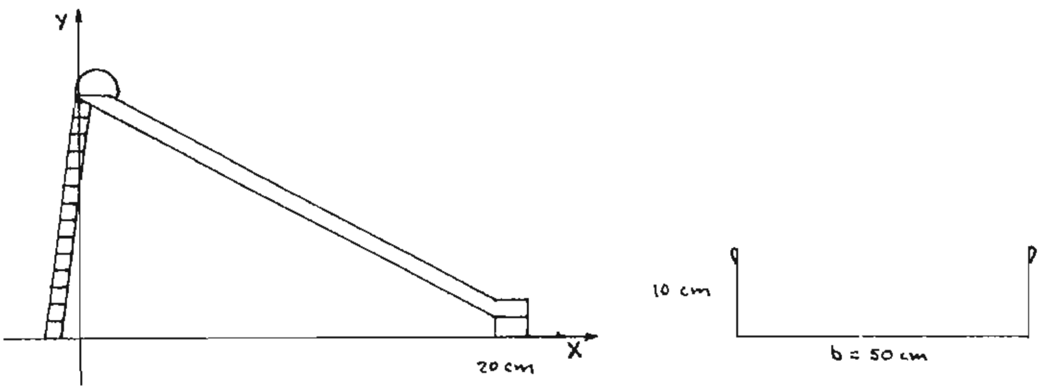
Si definimos $A(x_o, y_o) = \int_{-\infty}^{x_o} \int_{-\infty}^{y_o} dx\, dy$ como el'área acumulada' hasta (x_o, y_o), evaluar $A(x_o, y_o)$ para el triángulo si (x_o, y_o) es cualquier punto en el plano

Hacer lo mismo para el rectángulo $0 \leq x \leq a$ $\qquad 0 \leq y \leq b$

Calcular el área bajo la parábola $y=x^2$ $\qquad 0 \leq x \leq 1$
Calcular el área bajo la curva $y=x^n$ $\qquad 0 \leq x \leq 1$
Calcular el área bajo la curva $y=x^p$ p racional positivo

$0 \leq x \leq 1$

* Se tiene una resbaladilla de ancho b= 50cm y $y=5-3e^{-\frac{x}{5}}$ m
¿Cuánta lámina de metal en área se utilizó para construir la resbaladilla si en los bordes hay 10cm de altura para apoyar las manos.



* Un esposo va a tener su primer hijo y decide pesar desde el 2do mes, diariamente a su esposa para ver la evolución. Se encuentra que

$$P(t) = \text{peso (al día t)} = \cos\pi t + at^2 + c$$

$$30 \leq t \leq 280 \text{ días}$$

¿Si el modelo fuera bueno, cuánto pesará al final del embarazo?

¿Cuál es la velocidad de crecimiento de peso para cualquier tiempo t?

Haga las dos gráficas correspondientes.

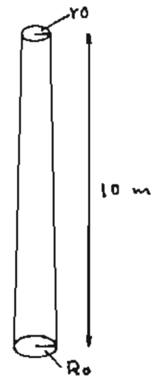
* Determina la derivada de $(f \circ g)(x)$ con $g(x)$ arbitraria y
  (a) $f_1(y) = y - a$

  (b) $f_2(y) = by$

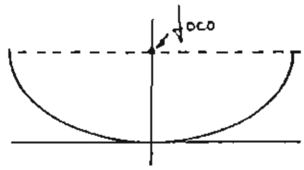
  ¿Cambian los puntos críticos de $g(x)$?
  Graficar $(f \circ g)(x)$ si $g(x) = x^2 + kx$

  Graficar $f_1 \circ f_2 \circ g(x)$ y $f_2 \circ f_1 \circ g(x)$

* ¿Cuánto pesa un poste de luz con forma de cono?



altura 10 metros, radio inferior $R_o = 30$cm
radio superior $r_o = 15$cm
Espesor uniforme = 2cm
Densidad uniforme = $5 kg/dm^3$



* Determinar la longitud de una parábola cuya altura máxima coincida con la del foco y el área bajo la curva y entre las dos ramas.

* Proponga una función aproximada de la distancia de la Tierra al Sol como función del tiempo.

* Proponga una función aproximada del peso de usted como función del tiempo durante toda su vida hasta ahora.

* Sea $f(x) = 2x$ y sea $g(y) = 4y$
  Calcular la composición $g \circ f$
  Graficar $f \circ g$ y $g \circ f$
  Calcular $g'(y)$, $f'(x)$ y $(g \circ f)'$
  ¿Qué significa geométricamente esta derivada? ¿Cómo se relaciona con la regla de la cadena?

* ¿Cuántas derivadas de orden 1,2,... diferentes de cero tiene un polinomio $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$?

  ¿Cuántos puntos críticos puede tener?

* ¿Cuántas funciones derivadas De^x, D^2e^x, D^ne^x, diferentes de cero existen?

* ¿Cómo escribiría el conjunto $-1 \leq x \leq 11$ mediante valor absoluto? ¿$2 \leq x \leq 6$? y ¿$x \leq 5$ o $x \geq 10$?

* ¿Cuántas funciones derivadas de orden n diferentes de 0 existen de la función cosx?

* La ley de Newton de Calentamiento (o Enfriamiento) dice que si un cuerpo tiene una temperatura inicial T_0 diferente de la temperatura ambiente Ta, entonces se calienta (o enfría) de acuerdo a la siguiente ecuación:

  $$T(t) = Ta - (Ta - T_0)\, e^{-kt}$$

  T(t) = temperatura al tiempo t
  k = constante

  Grafique la curva de enfriamiento respecto al tiempo

  Grafique la curva de calentamiento respecto al tiempo

  ¿En cuánto tiempo se enfría $\frac{(Ta-T_0)}{2}$ grados?

  ¿A qué temperatura tiende el cuerpo? Demuéstrelo matemáticamente.

  Obtenga la derivada $\frac{dT(t)}{dt}$ y grafíquela y

  qué significa y qué ocurre con esta derivada cuando $t \to \infty$?

* Sólo algunas moléculas de una Mol de un gas tienen la suficiente energía para reaccionar con otros elementos. Se demuestra que esta cantidad es $n = Ne^{-Q/RT}$

  N = Cantidad total de moléculas

  T = Temperatura en grados Kelvin

  $Q = Nq$

  q = Energía de activación = energía mínima para poder reaccionar.

  Grafique n respecto a T

  ¿Para qué valor de T reaccionarán la mitad de las moléculas?

  ¿Si $T \to \infty$, a qué valor tiende n?

  Calcule y grafique $\frac{dn}{dt}$ respecto a t, ¿qué ocurre con esta derivada cuando $T \to \infty$? ¿Qué significa esto?

* En qué punto se cortan, si es que lo hacen, las siguientes funciones:

  a) $y = e^{-x}$ y $y = x$

  b) $y = e^{-x^2}$ y $y = x$

  c) $y = e^{-x^2}$ y $y = x^2$

  d) $y = \log_e x$ y $y = x$

Problemas de cálculo
diferencial e integral
Se terminó de imprimir en
el mes de noviembre del año 2006
en los talleres de la Sección
de Impresión y Reproducción de la
Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco

La edición
estuvo a cargo de
la Sección de Producción
y Distribución Editoriales

Se imprimieron
100 ejemplares más sobrantes
para reposición.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

COSEI
COORDINACIÓN DE SERVICIOS DE INFORMACIÓN

Formato de Papeleta de Vencimiento

El usuario se obliga a devolver este libro en la fecha señalada en el sello mas reciente

Código de barras.. 2893122

FECHA DE DEVOLUCION

- Ordenar las fechas de vencimiento de manera vertical.
- Cancelar con el sello de "DEVUELTO" la fecha de vencimiento a la entrega del libro

PROBLEMAS DE CALCULO DIF. E INTEGRAL
BECERRIL/GRABINSKY/O
23879 $ 16.00
• 01-CBI

ISBN: 970-654-501-8
978-97065-45015

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Ciencias Básicas
Coordinación de Extensión Universitaria
Sección de Producción y Distribución Editoriales

Ciencias